

В.И.Антонов, О.О.Егорычев, А.В.Пашков

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИКИ

Учебное пособие
по теоретической механике



МОСКВА 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.И.Антонов, О.О.Егорычев, А.В.Пашков

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИКИ

**Учебное пособие
по теоретической механике**

МОСКВА 2008

УДК 531

Основные вопросы статики: Учебное пособие по теоретической механике/
В.И.Антонов, О.О.Егорычев, А.В.Пашков / Моск. гос. строит. ун-т, М., МГСУ,
2007 - 120 с.

Рецензент
проф., д-р. физ.-мат. наук **С.В.Шешенин**
(МГУ им. М.В.Ломоносова)

ISBN 5-7264-0440-8

© МГСУ, 2008

© Кол. авт. 2008

Введение

Теоретическая механика представляет собой науку об общих законах механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Будучи, по существу, одним из разделов физики, теоретическая механика давно выделилась в отдельную дисциплину и получила широкое самостоятельное развитие благодаря своим обширным и важным приложениям в естествознании и технике, одной из основ которой она является. Беря свое начало от техники и развиваясь вместе с нею, теоретическая механика особенно тесно связана с техническими науками, в которых законы и методы механики широко используются как при обосновании ряда исходных положений, так и при проведении многочисленных конкретных инженерных расчётов.

В теоретической механике изучается одна из форм движения материи — механическое движение, состоящее в том, что тело с течением времени изменяет своё положение в пространстве по отношению к другим телам. Механическим называют тот вид взаимодействия тел, в результате которого происходит изменение их движения или изменение их формы (деформация).

Вопросами изучения движения мы займёмся позднее, когда будем рассматривать кинематику и динамику материальных тел. Начнём же изложение курса теоретической механики с вопросов равновесия материальных тел, которые рассматриваются в разделе "Статика". В этом коротком введении мы остановимся на том минимуме основных понятий, который необходим для изучения статики.

Теоретическая механика является естественной наукой. Она опирается на результаты опыта и наблюдений и использует математический аппарат при анализе результатов этих наблюдений. Любой материальный объект (неважно какого - искусственного или естественного - происхождения) настолько сложен и многообразен в своих свойствах и проявлениях, что может представлять интерес для специалистов различных наук (физиков, химиков, медиков, инженеров и т.д.), каждого из которых

интересуют конкретные проявления свойств изучаемого тела. Понятно, что изучая какое-либо тело, мы не можем охватить всё многообразие его свойств. Отвлекаясь при изучении механического движения материальных тел от всего частного, менее существенного, второстепенного и учитывая только те свойства, которые в данной задаче являются определяющими, мы приходим к рассмотрению различных моделей материальных тел, представляющих собой ту или иную степень абстракции. В механике рассматриваются различные модели материальных тел: материальная точка, механическая система, сплошное тело и т.д. В первом разделе теоретической механики — статике, в основном, используется модель абсолютно твёрдого тела, в которой пренебрегают малыми изменениями формы тела (деформациями).

Абсолютно твёрдым называется тело, в котором расстояние между любыми двумя точками не изменяется при любых механических взаимодействиях.

Изменение состояния тела — нарушение состояния покоя или изменение характера движения происходят в результате его механического взаимодействия с другими телами.

Фундаментальным понятием механики является сила, которая представляет собой количественную меру механического взаимодействия материальных тел. Сила — величина векторная. Её действие на тело определяется численным значением или модулем силы, направлением действия и точкой приложения (рис. 1). Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия силы. Единицей измерения силы в системе СИ является ньютон (Н).



Рис.1

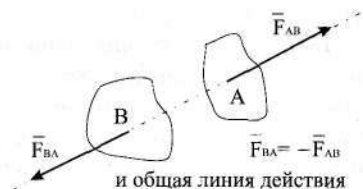


Рис.2

Характер механического взаимодействия материальных тел определяет третий закон Ньютона (рис. 2):

два материальных тела взаимодействуют с силами, равными по модулю и действующими по одной прямой в противоположные стороны.

Обычно исследователя интересует движение вполне определённого тела или конструкции, состоящей из нескольких тел – системы тел. Такая система тел подвержена многообразным механическим воздействиям.

Во-первых, тела, входящие в рассматриваемую систему, взаимодействуют друг с другом. Силы, определяющие такое взаимодействие, называются внутренними для данной системы тел (\vec{F}^i). Внутренние силы, как правило, заранее неизвестны.

Во-вторых, тела данной системы взаимодействуют с другими телами, в систему не входящими. Силы, возникающие при этом взаимодействии, называются внешними для данной системы тел (\vec{F}^e). Часть внешних сил обычно задана. Такие силы называются активными. Помимо этого, рассматриваемая система может находиться в непосредственном контакте с окружающими телами, не включёнными в рассматриваемую систему. В этом случае перемещения в пространстве тел рассматриваемой системы ограничены. Тело, ограничивающее свободу перемещения рассматриваемого материального объекта, называется связью. Сила, с которой связь действует на тело (систему тел), называется силой реакции связи. Реакции связей заранее неизвестны, они зависят от приложенных к телу активных сил, т.е. носят пассивный характер. Если на тело связи не наложены, тело называется свободным.

При изучении покоя или движения несвободного тела это тело мысленно выделяют из системы окружающих тел. При этом механическое действие связей учитывают, вводя реакции связей. Такой приём обычно формулируют как принцип освобождаемости от связей:

несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, заменив их механическое действие на тело силами реакций связей.

Начнём с рассмотрения вопросов равновесия материальных тел, под которым (не вдаваясь пока в подробности) будем понимать состояние покоя тела по отношению к какому либо другому телу, например, по отношению к Земле.

Глава 1

Предмет статики. Действия над силами

1.1 Основные определения и аксиомы статики

В статике изучаются условия равновесия и методы преобразования одних силовых систем в другие, эквивалентные данным.

Определение 1

Множество приложенных к телу сил называется системой сил:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n\} \quad \text{или} \quad \{\vec{F}_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 2.

Две системы сил называются эквивалентными, если приложение каждой из них к одному и тому же покоящемуся свободному твёрдому телу приводит к одному и тому же движению:

$$\{\vec{F}_i\} \sim \{\vec{P}_j\}.$$

Определение 3

Система сил, под действием которой свободное твёрдое тело может оставаться в покое, называется уравновешенной или эквивалентной нулю:

$$\{\vec{F}_k\} \sim 0.$$

Определение 4

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей системы сил:

$$\{\vec{F}_k\} \sim \vec{F}.$$

В основе статики лежит система исходных положений, принимаемых без доказательства и называемых аксиомами статики. Справедливость следствий, логически вытекающих из аксиом, подтверждается опытными данными. Аксиомы устанавливают простейшие правила действия над силами и системами сил.

Аксиома 1

Две силы, приложенные в одной точке тела, эквивалентны одной силе, приложенной в той же точке и равной геометрической сумме этих сил (рис. 1.1).

Аксиома 2.

Не изменяя действия системы сил на тело, к ней можно добавить или от неё отнять уравновешенную систему сил.

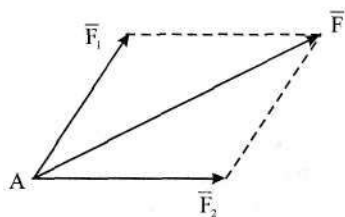


Рис. 1.1

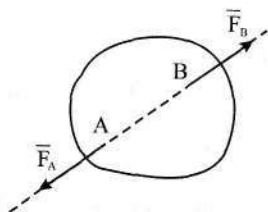


Рис. 1.2

Аксиома 3

Система двух сил, приложенных к абсолютно твёрдому телу, эквивалентна нулю тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.2).

Сформулированные аксиомы позволяют рассматривать систему сил, приложенную к абсолютно твёрдому телу, как систему скользящих векторов. В самом деле, аксиома 1 позволяет рассматривать силу как вектор. Покажем, что это вектор скользящий.

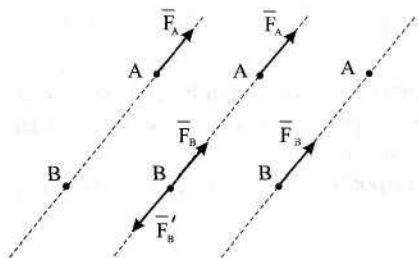


Рис. 1.3

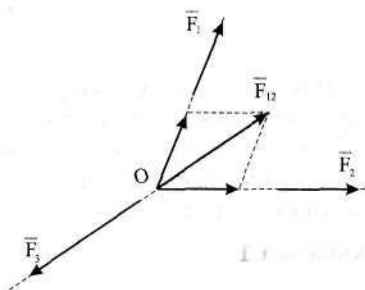


Рис. 1.4

Пусть в точке A абсолютно твёрдого тела приложена сила \vec{F}_A . Выберем на линии действия силы любую точку B , в которой приложим силы \vec{F}_B и \vec{F}'_B (рис. 1.3), причём $\vec{F}_A = \vec{F}_B = -\vec{F}'_B$. На основании аксиом 1 и 2 получаем:

$$\vec{F}_A \sim \{\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}'_B\} \quad \text{так как} \quad \{\vec{F}_B, \vec{F}'_B\} \sim 0.$$

Но силы \vec{F}_A и \vec{F}'_B также образуют уравновешенную систему сил и, следовательно, могут быть отброшены.

Таким образом, не изменяя действия силы на абсолютно твёрдое тело, точку приложения силы можно переносить в любую точку её линии действия.

Говоря о системе сил, будем подразумевать (если нет особой оговорки), что система сил приложена к абсолютно твёрдому телу и, следовательно, может рассматриваться как система скользящих векторов.

Непосредственно из аксиом следует полезное утверждение, которое носит название теоремы о трёх силах:

если система трёх сил уравновешена и линии действия двух сил пересекаются в некоторой точке O , то линия действия третьей силы проходит через точку O .

Доказательство. Пусть O — точка пересечения линий действия сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . Перенесём силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 в точку O и на основании аксиомы 1 заменим одной силой \vec{F}_{12} (рис. 1.4). Из аксиомы 3 следует, что сила \vec{F}_3 должна иметь общую линию действия с силой \vec{F}_{12} , так как

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim \{\vec{F}_{12}, \vec{F}_3\} \sim 0,$$

и, следовательно, линия действия силы \vec{F}_3 проходит через точку O .

1.2 Элементы векторной алгебры

В статике широко используется аппарат векторной алгебры. Напомним некоторые его элементы.

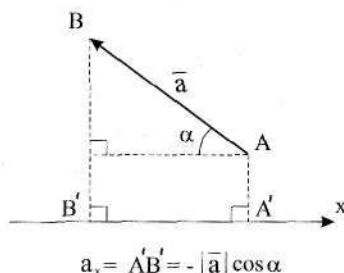
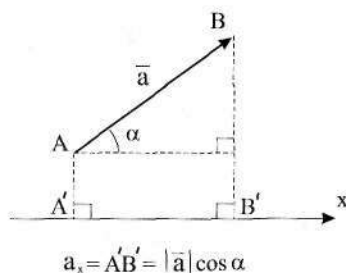


Рис. 1.5

Проекцией вектора \vec{a} на координатную ось x называется взятая с соответствующим знаком длина отрезка оси, заключённого между проекциями начала и конца вектора (рис. 1.5); при этом проекция положительна, если перемещение от проекции начала вектора (A') к проекции конца (B') совпадает с положительным направлением оси x , и отрицательна в противоположном случае.

Знак проекции вектора на ось будет получаться автоматически, если использовать угол между направлением вектора и положительным направлением оси (рис. 1.6).

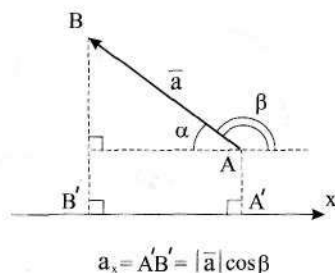


Рис. 1.6

Проекцией вектора \vec{a} на плоскость (например, на координатную плоскость xy) называется вектор \vec{a}_{xy} , соединяющий проекции начала и конца вектора \vec{a} на плоскость xy (рис. 1.7).

Вектор \vec{a} можно представить в виде (рис. 1.8):

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где

$\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ — составляющие вектора \vec{a} по осям координат;

a_x, a_y, a_z — проекции вектора \vec{a} на оси координат;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы (орты) координатных осей.

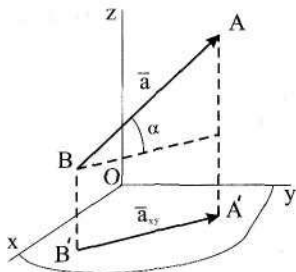


Рис. 1.7

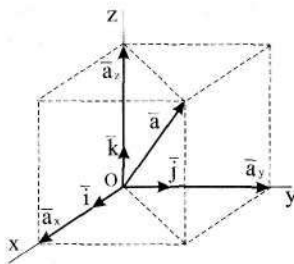


Рис. 1.8

Существенную роль при решении большинства вопросов статики играет понятие векторной суммы.

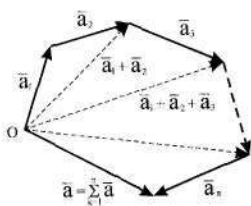


Рис. 1.9

Сумма нескольких векторов может быть построена как замыкающая сторона ломаной линии, составленной из слагаемых векторов (рис. 1.9). При этом начало каждого последующего слагаемого вектора совпадает с концом предыдущего, а замыкающий вектор (векторная сумма) соединяет начало первого слагаемого вектора с концом последнего. Составленный таким способом многоугольник называется векторным многоугольником. Если ломаная линия, составленная из слагаемых векторов, замкнута (т.е. конец последнего вектора совпадает с началом первого), то сумма векторов равна нулю.

При аналитическом вычислении векторной суммы определяют проекции суммы на координатные оси, которые равны сумме соответствующих

проекций слагаемых векторов:

$$a_x = \sum_{k=1}^n a_{kx}; \quad a_y = \sum_{k=1}^n a_{ky}; \quad a_z = \sum_{k=1}^n a_{kz}.$$

Модуль векторной суммы в этом случае вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

В векторном исчислении различают два вида умножения векторов — скалярное и векторное.

В результате скалярного произведения получаем число (скаляр), равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Если векторные сомножители заданы своими проекциями на декартовы координатные оси, то скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

В результате векторного умножения получается вектор \vec{c}

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b},$$

модуль которого равен произведению модулей векторов на синус угла между ними:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Вектор \vec{c} направлен перпендикулярно плоскости, содержащей сомножители, в ту сторону, откуда кратчайший поворот от первого сомножителя \vec{a} ко второму сомножителю \vec{b} виден против хода часовой стрелки (рис. 1.10).

Если сомножители заданы проекциями на декартовы координатные оси, то векторное произведение вычисляем по формуле:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по первой строке, получаем проекции векторного произведения на оси координат:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y; \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z; \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

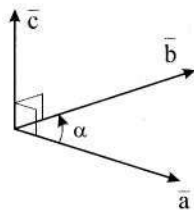


Рис. 1.10

1.3 Момент силы относительно точки

Представим себе, что у некоторого тела закреплена одна точка. Сила, приложенная к такому телу, пытается повернуть тело вокруг оси, проходящей через закреплённую точку перпендикулярно плоскости, содержащей эту точку и линию действия силы. Причём вращательный эффект силы зависит не только от её модуля, но и от того, как она приложена по отношению к закреплённой точке. Введём величину, характеризующую описанное явление.

Пусть задана сила \vec{F} , приложенная в точке A абсолютно твёрдого тела и некоторый центр O (рис. 1.11).

Моментом силы относительно точки называется вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора, проведённого из данного центра в точку приложения силы, и этой силы:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.1)$$

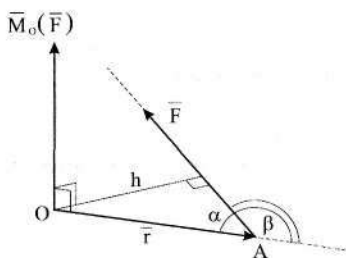


Рис. 1.11

Из определения следует, что момент силы относительно точки направлен перпендикулярно плоскости, содержащей силу и точку, относительно которой вычисляется момент, причём, в ту сторону, откуда поворот тела вокруг точки под действием силы виден против хода часовой стрелки. Модуль момента равен произведению модуля силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы (плечо силы):

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \beta = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin(\pi - \alpha) = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| h.$$

Вектор момента изображают приложенным в той точке, относительно которой он вычисляется.

Примем точку O за начало декартовой системы координат. Представляя векторное произведение в виде определителя

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

и раскладывая определитель по первой строке, получаем проекции вектора момента на координатные оси:

$$M_{ox} = yF_z - zF_y; \quad M_{oy} = zF_x - xF_z; \quad M_{oz} = xF_y - yF_x, \quad (1.2)$$

где x, y, z — проекции радиуса-вектора на координатные оси, т.е. координаты точки приложения силы (точки A); F_x, F_y, F_z — проекции силы на оси координат.

Заметим, что если момент силы вычисляется относительно произвольной точки $C(a, b, c)$, не являющейся началом координат, то

$$r_x = x - a; \quad r_y = y - b; \quad r_z = z - c.$$

Проведём через точку C , относительно которой вычисляется момент силы, какую либо ось.

Моментом силы относительно оси называется проекция на ось вектора момента силы, вычисленного относительно любой точки этой оси.

Таким образом, формулы (1.2) дают моменты силы \vec{F} относительно координатных осей (поскольку точка O лежит на каждой из этих осей).

Как известно, действие силы на абсолютно твёрдое тело характеризуется модулем, направлением и линией действия силы. Модуль и направление силы можно задать проекциями силы на координатные оси. Покажем, что линию действия силы определяет момент силы относительно какой-либо точки. В самом деле, каждое из уравнений (1.2) представляет собой уравнение некоторой плоскости, содержащей точку приложения силы. Из определения момента силы относительно точки получаем:

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_o(\vec{F}) = 0 \quad \text{или} \quad F_x M_{ox} + F_y M_{oy} + F_z M_{oz} = 0.$$

Таким образом, среди шести чисел $F_x, F_y, F_z, M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}$ независимых только пять, а среди трёх уравнений (1.2) независимы только два уравнения. Система этих двух независимых уравнений определяет прямую (линию пересечения плоскостей), которая является множеством точек приложения силы — точек $A(x, y, z)$, т.е. является линией действия силы.

1.4 Главный вектор и главный момент системы сил

Рассмотрим систему сил $\{\vec{F}_k\}, k = 1, 2, \dots, n$, произвольным образом расположенных в пространстве. Пусть O — любая точка; A_k — точка

приложения силы с номером k . Введём две важнейшие характеристики системы сил.

Главным вектором системы сил называется векторная сумма всех сил системы:

$$\vec{R}^* = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Главным моментом системы сил относительно некоторого центра O называется векторная сумма моментов всех сил системы относительно точки O :

$$\vec{M}_o^* = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} \times \vec{F}_k.$$

Вектор главного момента \vec{M}_o^* изображают приложенным в той точке O , относительно которой он вычисляется.

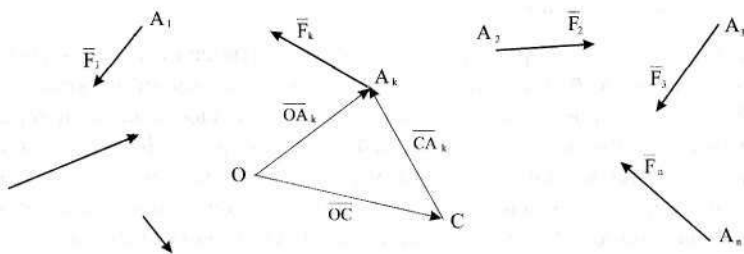


Рис. 1.12

Установим связь между главными моментами системы сил относительно двух разных точек O и C (рис. 1.12):

$$\begin{aligned} \vec{M}_o^* &= \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA_k}) \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OC} \times \vec{F}_k + \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_k = \\ &= \overrightarrow{OC} \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \sum_{k=1}^n \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_k. \end{aligned}$$

Учитывая определения главного вектора и главного момента системы сил, получаем

$$\vec{M}_o^* = \vec{M}_c^* + \overrightarrow{OC} \times \vec{R}^*. \quad (1.3)$$

Заметим, что главный вектор и главный момент системы сил представляют собой чисто геометрические величины и не могут рассматриваться как некоторая сила или момент некоторой силы.

1.5 Пара сил

Парой сил называется система двух сил, равных по модулю и действующих по параллельным прямым в противоположные стороны.

Плоскость, в которой расположены силы пары, называется плоскостью действия пары сил. Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары называется плечом пары сил.

В этом параграфе мы остановимся только на некоторых свойствах пары сил. В дальнейшем, после изучения основных теорем статике, мы вернёмся к рассмотрению этой силовой системы.

Главный вектор пары сил равен нулю:

$$\vec{R}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0,$$

так как по определению $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Как следует из формулы (1.3), главный момент пары сил не зависит от точки, относительно которой он вычисляется:

$$\vec{M}_o^* = \vec{M}_c^* + \vec{OC} \times \vec{R}^* = \vec{M}_c^*, \quad \text{поскольку} \quad \vec{R}^* = 0.$$

Моментом пары сил называется сумма моментов сил, образующих пару, вычисленная относительно произвольно выбранной точки.

Момент пары сил можно вычислить как момент одной из сил пары относительно точки приложения другой силы той же пары, поскольку эта вторая сила не создаёт момент относительно своей точки приложения:

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{M}_A(\vec{F}_2) = \vec{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_B(\vec{F}_1) = \vec{BA} \times \vec{F}_1.$$

Момент пары сил — вектор свободный; он располагается перпендикулярно плоскости действия пары сил, причём направлен в ту сторону, откуда поворот пары виден против хода часовой стрелки (рис. 1.13). Модуль момента пары равен произведению модуля одной из сил пары на её плечо.

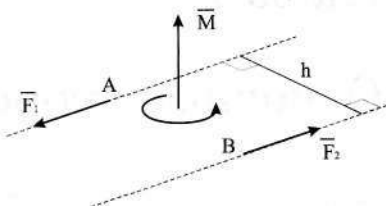


Рис. 1.13

Глава 2

Основные теоремы статики

2.1 Вспомогательные теоремы

Лемма 1

Сила \vec{F} , приложенная в какой-либо точке A , эквивалентна такой же по модулю и направлению силе, приложенной в другой точке O , и паре сил, момент которой равен моменту силы \vec{F} относительно точки O .

Доказательство. Пусть дана сила \vec{F} , приложенная в точке A , O — произвольно выбранная точка (рис. 2.1). На основании аксиомы 2 приложим к точке O уравновешенную систему сил

$$\{\vec{F}', \vec{F}''\} \sim 0, \quad \text{причём,} \quad \vec{F}' = -\vec{F}'' = \vec{F}; \quad \text{получаем} \quad \vec{F} \sim \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\}.$$

Силы \vec{F} и \vec{F}'' образуют пару сил, момент которой равен моменту силы \vec{F}' относительно точки O :

$$\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}'') = \vec{M}_O(\vec{F}') = \vec{OA} \times \vec{F}.$$

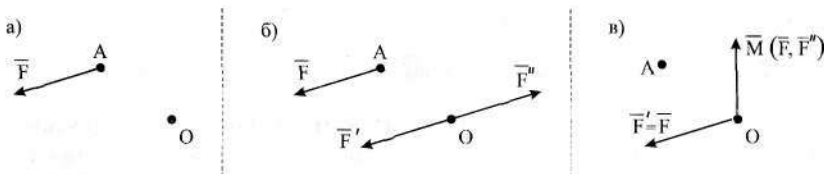


Рис. 2.1

Лемма 2

Две пары сил, плоскости действия которых имеют хотя бы одну общую точку, эквивалентны одной паре сил, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар.

Доказательство. Если две плоскости имеют общую точку O , то они или пересекаются, или совпадают. Рассмотрим более общий случай пересекающихся плоскостей. Пусть Π_1 — плоскость действия пары сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) ; Π_2 — плоскость действия пары сил (\vec{F}_3, \vec{F}_4) ; A_k — точки приложения сил. Выберем на линии пересечения плоскостей любую точку C (если плоскости действия пар сил совпадают, то C любая точка плоскости). Разложим каждую из четырёх заданных сил на составляющие \vec{F}_{ko} и \vec{F}_{kc} , линии действия которых проходят через точки O и C соответственно. Переносим составляющие вдоль их линий действия в точки O и C соответственно, заменим приложенные в точках O и C силы \vec{F}'_{ko} и \vec{F}'_{kc} равнодействующими \vec{Q}_o и \vec{Q}_c (рис. 2.2).

$$\{\vec{F}_k\} \sim \{(\vec{F}_{ko}), (\vec{F}_{kc})\} \sim \{(\vec{F}'_{ko}), (\vec{F}'_{kc})\} \sim \{\vec{Q}_o, \vec{Q}_c\}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

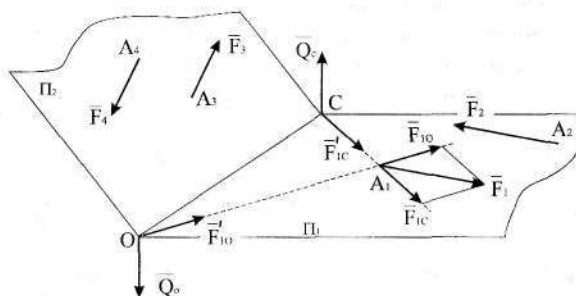


Рис. 2.2

Силы \vec{Q}_o и \vec{Q}_c образуют пару сил, поскольку

$$\begin{aligned} \vec{Q}_o &= \sum_{k=1}^4 \vec{F}'_{ko} = \sum_{k=1}^4 \vec{F}_{ko} = \sum_{k=1}^4 (\vec{F}_k - \vec{F}_{kc}) = \sum_{k=1}^4 \vec{F}_k - \sum_{k=1}^4 \vec{F}_{kc} = \\ &= - \sum_{k=1}^4 \vec{F}'_{kc} = -\vec{Q}_c, \quad \text{так как} \quad \sum_{k=1}^4 \vec{F}_k = 0. \end{aligned}$$

Момент пары сил (\vec{Q}_o, \vec{Q}_c) равен сумме моментов слагаемых пар:

$$\begin{aligned}\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) + \vec{M}(\vec{F}_3, \vec{F}_4) &= \sum_{k=1}^4 \vec{M}_c(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^4 \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_k = \\ &= \sum_{k=1}^4 \overrightarrow{CA_k} \times (\vec{F}_{ko} + \vec{F}_{kc}) = \sum_{k=1}^4 \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_{ko} = \sum_{k=1}^4 \overrightarrow{CO} \times \vec{F}'_{ko} = \\ &= \overrightarrow{CO} \times \sum_{k=1}^4 \vec{F}'_{ko} = \overrightarrow{CO} \times \vec{Q}_o = \vec{M}(\vec{Q}_o, \vec{Q}_c), \quad \text{так как} \quad \sum_{k=1}^4 \overrightarrow{CA_k} \times \vec{F}_{kc} = 0.\end{aligned}$$

2.2 Приведение системы сил к центру

Одной из основных задач статики является приведение системы сил к простейшему виду, т.е. преобразование заданной системы сил в другую, ей эквивалентную, но содержащую минимальное число сил.

Теорема.

Произвольная система сил эквивалентна системе, состоящей из одной силы, равной главному вектору системы сил и приложенной в произвольно выбранной точке (центре приведения), и одной пары сил, момент которой равен главному моменту системы сил относительно этой точки.

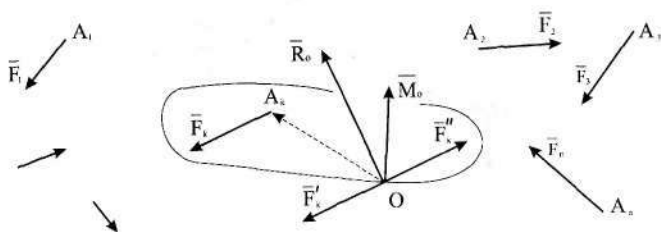


Рис. 2.3

Доказательство. Пусть задана система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n\}$, произвольным образом расположенных в пространстве (рис. 2.3). Выберем любую точку O в качестве центра приведения. Используя лемму 1, заменим заданную систему сил $\{\vec{F}_k\}$ эквивалентной, которая будет состоять

из приложенных в точке O сил \vec{F}'_k и пар сил (\vec{F}_k, \vec{F}''_k) , плоскости действия которых имеют общую точку O .

В соответствии с аксиомой 1 система сил $\{\vec{F}'_k\}$ эквивалентна одной силе \vec{R}_o , приложенной в точке O и равной геометрической сумме всех заданных сил, т.е. главному вектору системы сил:

$$\vec{R}_o = \sum_{k=1}^n \vec{F}'_k = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{R}^*.$$

В соответствии с леммой 2 система пар сил (\vec{F}_k, \vec{F}''_k) эквивалентна одной паре, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар, т.е. главному моменту исходной системы сил относительно точки O :

$$\vec{M}_o = \sum_{k=1}^n \vec{M}(\vec{F}_k, \vec{F}''_k) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k) = \vec{M}_o^*.$$

2.3 Условия равновесия системы сил

Второй основной задачей статики является определение условий, при которых заданная система сил эквивалентна нулю (уравновешена).

Теорема

Система сил эквивалентна нулю (уравновешена) тогда и только тогда, когда её главный вектор и главный момент относительно произвольной точки равны нулю.

Доказательство. Приведём заданную систему сил к произвольно выбранному центру O . Тогда

$$\{\vec{F}_k\} \sim \{\vec{R}_o, \vec{Q}_o, \vec{Q}_c\}, \quad \text{причём} \quad \vec{R}_o = \vec{R}^*; \quad \vec{Q}_c = -\vec{Q}_o; \quad \vec{M}(\vec{Q}_c, \vec{Q}_o) = \vec{M}_o^*.$$

Силы \vec{R}_o и \vec{Q}_o заменим равнодействующей \vec{P}_o (рис. 2.4). Таким образом, любую систему сил можно заменить эквивалентной системой двух сил. При этом

$$\vec{P}_o + \vec{Q}_c = \vec{R}_o + \vec{Q}_o + \vec{Q}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{R}^*; \quad (2.1)$$

$$\vec{OC} \times \vec{Q}_c = \vec{M}(\vec{Q}_c, \vec{Q}_o) = \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k) = \vec{M}_o^*.$$

Аксиома 3 устанавливает необходимые и достаточные условия равновесия системы двух сил, приложенных к абсолютно твёрдому телу — силы должны быть равными по модулю, противоположными по направлению

$$\vec{Q}_c + \vec{P}_o = 0$$

и иметь общую линию действия (рис. 2.5), т.е.

$$\overrightarrow{OC} \times \vec{Q}_c = 0.$$

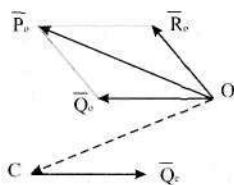


Рис. 2.4

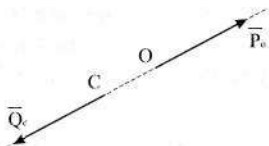


Рис. 2.5

Сравнивая полученные равенства с равенствами (2.1), находим, что для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы геометрическая сумма всех сил системы (главный вектор) равнялась нулю и сумма моментов всех сил системы относительно произвольно выбранной точки (главный момент) равнялась нулю:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k) = 0. \quad (2.2)$$

Принимая центр приведения за начало декартовой системы координат, получаем в проекциях на координатные оси:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad (2.3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Таким образом,

для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трёх взаимно перпендикулярных осей координат равнялась нулю и сумма моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей равнялась нулю.

2.4 Эквивалентность систем сил

Теорема

Две системы сил эквивалентны тогда и только тогда, когда их главные векторы и главные моменты относительно одного и того же произвольно выбранного центра равны между собой.

Доказательство. Пусть две системы сил эквивалентны $\{\vec{F}'_i\} \sim \{\vec{F}''_j\}$. Покажем, что главные векторы и главные моменты этих систем равны между собой. Выберем вспомогательную систему сил $\{\vec{P}_k\}$ такую, что

$$\{(\vec{F}'_i), (\vec{P}_k)\} \sim 0; \quad \text{и, следовательно,} \quad \{(\vec{F}''_j), (\vec{P}_k)\} \sim 0.$$

Условия равновесия для расширенных систем имеют вид:

$$\sum_i \vec{F}'_i + \sum_k \vec{P}_k = 0; \quad \sum_i \vec{M}_o(\vec{F}'_i) + \sum_k \vec{M}_o(\vec{P}_k) = 0; \quad (a)$$

$$\sum_j \vec{F}''_j + \sum_k \vec{P}_k = 0; \quad \sum_j \vec{M}_o(\vec{F}''_j) + \sum_k \vec{M}_o(\vec{P}_k) = 0. \quad (b)$$

Сравнивая равенства (a) и (b), получаем:

$$\sum_i \vec{F}'_i = \sum_j \vec{F}''_j; \quad \text{или} \quad \vec{R}^{s'} = \vec{R}^{s''}; \quad (c)$$

$$\sum_i \vec{M}_o(\vec{F}'_i) = \sum_j \vec{M}_o(\vec{F}''_j); \quad \text{или} \quad \vec{M}_o^{s'} = \vec{M}_o^{s''}. \quad (d)$$

Таким образом, доказана необходимость условий (c) и (d) для эквивалентности систем сил.

Докажем достаточность. Пусть условия (c) и (d) выполнены. Покажем, что системы сил при этом эквивалентны. Рассмотрим вспомогательную систему сил $\{\vec{P}_k\}$, для которой справедливы равенства (a), и следовательно, справедливы равенства (b). На основании теоремы об условиях равновесия системы сил отсюда получаем

$$\{(\vec{F}'_i), (\vec{P}_k)\} \sim \{(\vec{F}''_j), (\vec{P}_k)\} \sim 0.$$

На основании аксиомы 2 к любой системе сил можно добавить или от неё отнять уравновешенную систему сил. Отсюда

$$\{\vec{F}'_i\} \sim \{(\vec{F}'_i), [(\vec{F}''_j), (\vec{P}_k)]\} \sim \{(\vec{F}''_j), [(\vec{F}'_i), (\vec{P}_k)]\} \sim \{\vec{F}''_j\}.$$

2.5 Снова о паре сил

В соответствии с теоремой об эквивалентности систем сил, две пары сил эквивалентны тогда и только тогда, когда равны их моменты. Отсюда следует, что, не изменяя действия пары сил на абсолютно твёрдое тело, можно производить следующие преобразования пар сил (рис. 2.6):

- а) переносить и поворачивать пару сил в плоскости её действия;
- б) переносить пару сил в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары сил;
- в) изменять плечо и модули сил, образующих пару, так чтобы модуль момента пары оставался неизменным.

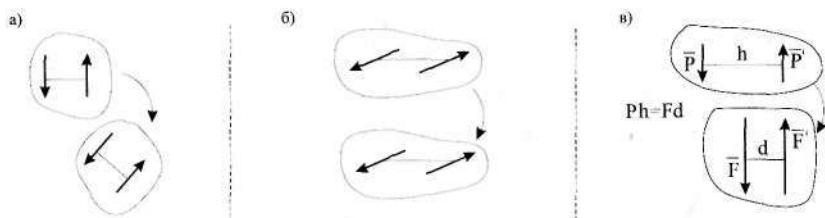


Рис. 2.6

Доказанная ранее теорема о сложении пар (лемма 2) оказывается справедливой при произвольном расположении пар сил в пространстве, поскольку в случае параллельности плоскостей действия пары сил можно перенести в одну плоскость.

2.6 Приведение системы сил к простейшему виду

1. Динамический винт

Приведём заданную систему сил к произвольно выбранному центру O . Система сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n\}$ оказывается эквивалентной системе сил, состоящей из силы \vec{R}_o , приложенной в точке O и равной главному вектору системы сил, и пары сил, момент которой \vec{M}_o равен главному моменту системы сил относительно центра приведения O . В общем случае между векторами \vec{R}_o и \vec{M}_o может быть любой угол α .

Принимая точку O за начало координат, проведём оси так, чтобы вектор \vec{R}_o совпал с одной из координатных осей, а вектор \vec{M}_o попал в одну из координатных плоскостей (рис. 2.7а).

Разложим вектор \vec{M}_0 на две составляющие, одна из которых \vec{M}_1 параллельна главному вектору, а вторая \vec{M}_2 перпендикулярна главному вектору. За плоскость действия пары сил с моментом \vec{M}_1 можно принять координатную плоскость xy ; вторая пара сил может быть размещена в координатной плоскости yz , в которой расположена сила \vec{R}_o .

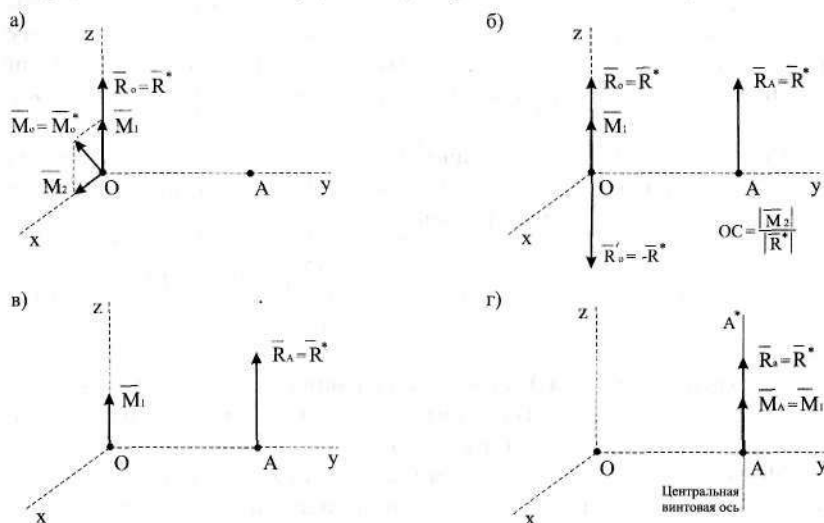


Рис. 2.7

Построим пару сил (\vec{R}'_o, \vec{R}_A) так, чтобы одна из сил пары \vec{R}'_o уравновешивала силу \vec{R}_o (рис.2.7б). Уравновешенную систему сил $\{\vec{R}_o, \vec{R}'_o\}$ можно отбросить.

В результате заданная система сил оказывается эквивалентной системе сил, состоящей из одной силы $\vec{R}_A = \vec{R}^*$ и одной пары сил, момент которой \vec{M}_1 коллинеарен силе (рис. 2.7в). Учитывая, что момент пары сил – вектор свободный, введём вместо вектора \vec{M}_1 вектор \vec{M}_A , расположенный вдоль линии действия силы \vec{R}_A . Такая силовая система называется динамическим винтом или динамой (рис.2.7г). Линия действия силы \vec{R}_A , входящей в динамический винт (прямая AA^*), называется центральной винтовой осью.

Существенную роль в исследовании системы сил играет угол α между главным вектором и главным моментом системы сил. Проще всего для вычисления этого угла использовать скалярное произведение главного вектора на главный момент (это произведение называется вторым статическим инвариантом):

$$J = \vec{R}^* \cdot \vec{M}_o^* = |\vec{R}^*| |\vec{M}_o^*| \cos \alpha = R_x^* M_{ox}^* + R_y^* M_{oy}^* + R_z^* M_{oz}^*, \quad (2.4)$$

Если сила и момент динамы направлены в одну сторону, динамический винт называется правым. Если сила и момент динамы противоположны по направлению, винт называется левым. К правому винту приводятся системы сил, для которых $J > 0$ ($0 \leq \alpha < \pi/2$). Если $J < 0$ ($\pi/2 < \alpha \leq \pi$), система сил эквивалентна левому динамическому винту.

Сила \vec{R}_A , входящая в динамический винт, по модулю и направлению совпадает с главным вектором системы сил. Вычислим модуль момента пары сил, входящей в динамический винт:

$$|\vec{M}_A| = |\vec{M}_1| = |\vec{M}_o^*| |\cos \alpha| = \frac{|\vec{R}^*| |\vec{M}_o^*| |\cos \alpha|}{|\vec{R}^*|} = \frac{|J|}{|\vec{R}^*|}. \quad (2.5)$$

Направление вектора \vec{M}_A совпадает с направлением главного вектора системы сил в случае правого винта ($J > 0$) и противоположно направлению главного вектора для левого винта.

Множество точек $A(x, y, z)$, при приведении к которым главный вектор коллинеарен главному моменту, называется центральной винтовой осью. Очевидно, такие точки расположены на прямой AA^* , параллельной главному вектору \vec{R}^* системы сил. Как следует из формулы (1.3), главный момент относительно точек прямой AA^* имеет одно и то же значение:

$$\vec{M}_{A^*}^* = \vec{M}_A^* + \vec{A^*A} \times \vec{R}^* = \vec{M}_A^*, \quad \text{т.к.} \quad \vec{A^*A} \times \vec{R}^* = 0 \quad \text{поскольку} \quad \vec{A^*A} \parallel \vec{R}^*.$$

Уравнение центральной винтовой оси найдём из условия

$$\vec{M}_A = \vec{M}_A^* \parallel \vec{R}^* = \vec{R}_A \quad \text{т.е.} \quad \vec{M}_A^* = q \vec{R}^*,$$

где $q = \frac{\vec{R}^* \cdot \vec{M}_A^*}{\vec{R}^* \cdot \vec{R}^*} = \frac{J}{|\vec{R}^*|^2}$ - параметр динамы.

Используя формулу (1.3), получаем

$$\vec{M}_O^* - \vec{OA} \times \vec{R}^* = q \vec{R}^*, \quad (2.6)$$

где O - произвольно выбранная точка.

Уравнение (2.6) представляет собой уравнение центральной винтовой оси в векторной форме. Принимая точку O за начало системы координат, запишем уравнение (2.6) в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} M_{ox}^* - (y R_z^* - z R_y^*) &= q R_x^*; \\ M_{oy}^* - (z R_x^* - x R_z^*) &= q R_y^*; \\ M_{oz}^* - (x R_y^* - y R_x^*) &= q R_z^*. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Среди трёх уравнений (2.7) только два независимых. Каждое из них определяет некоторую плоскость. Линия пересечения этих плоскостей и будет центральной винтовой осью.

2. Равнодействующая системы сил

Может оказаться, что главный вектор системы сил перпендикулярен главному моменту, т.е. $\alpha = \pi/2$. В этом случае отсутствует составляющая главного момента, коллинеарная главному вектору — $\vec{M}_1 = 0$ (Рис.2.7). Система сил эквивалентна одной силе, т.е. имеет равнодействующую $\vec{F} \equiv \vec{R}_A$. Поскольку $J = 0$, в уравнениях (2.6) и (2.7) необходимо положить $q = 0$. Учитывая определение главного момента системы сил, запишем равенство (2.6) в виде

$$\sum_{k=1}^n \vec{M}_o(\vec{F}_k) = \vec{OA} \times \vec{F}. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) составляет содержание теоремы Вариньона:

если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно произвольно выбранной точки равен сумме моментов всех сил системы относительно этой точки.

Уравнения (2.7) (при $q = 0$) в рассматриваемом случае будут определять линию действия равнодействующей.

3. Пара сил и уравновешенная система сил

Если главный вектор системы сил оказывается равным нулю при отличном от нуля главном моменте, то система сил эквивалентна паре сил, момент которой равен главному моменту, вычисленному относительно любого центра.

В том же случае, когда и главный вектор и момент равны нулю, система сил уравновешена.

Глава 3

Примеры решения задач приведения системы сил к простейшему виду

В основе решения первой основной задачи статики (приведение системы сил к простейшему виду) лежит теорема о приведении системы сил к одному центру. При решении задач о приведении системы сил к простейшему виду имеет смысл придерживаться определённой последовательности действий:

1. Вычислить главный вектор и главный момент заданной системы сил относительно выбранного (или заданного) центра приведения. Центр приведения, если возможно, следует принять за начало координат.

2. Вычислить второй статический инвариант и определить, к какому простейшему виду приводится заданная система сил.

3. Определить параметры простейшей силовой системы, эквивалентной заданной системе сил.

3.1 Системы сил, эквивалентные паре сил

Пример 3.1. На куб, ребро которого a , действует система сил, как показано на рис. 3.1. Дано: $F_1 = P$; $F_2 = 2\sqrt{2}P$; $F_3 = 2P$; $F_4 = 3\sqrt{2}P$; $F_5 = 3P$. Привести систему сил к простейшему виду.

Для решения задачи удобно использовать систему координат, оси которой направлены по рёбрам куба. Вычислим проекции главного вектора на координатные оси:

$$R_x^* = F_1 + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = P + 2P - 3P = 0;$$

$$R_y^* = F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_5 = 3P - 3P = 0;$$

$$R_z^* = F_3 - F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2P - 2P = 0.$$

Принимая начало координат O за центр приведения, вычислим проекции главного момента на координатные оси:

$$M_{ox}^* = F_3 a + F_5 a = 5Pa;$$

$$M_{oy}^* = F_1 a + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} a - F_3 a = Pa;$$

$$M_{oz}^* = F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} a = 3Pa.$$

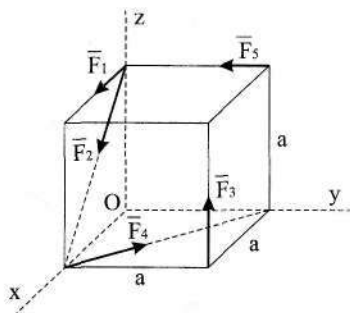


Рис. 3.1

Как видно, модуль главного вектора рассматриваемой системы сил равен нулю, а её главный момент отличен от нуля. Таким образом, система сил эквивалентна паре сил с моментом:

$$\vec{M} = (5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) Pa.$$

3.2 Системы сил, эквивалентные одной силе

Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей. Рассмотрим возможные случаи построения равнодействующей.

Если заданная система сил расположена в одной плоскости и число сил невелико, можно использовать чисто графический метод, основанный на использовании аксиомы о равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке (аксиома 1).

Рассмотрим систему трёх сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$, расположенных в одной плоскости (рис. 3.2). Определив точку пересечения каких-либо двух сил,

например, \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , перенесём силы вдоль их линий действия в эту точку и заменим равнодействующей \vec{F}_{12} . Затем ищем точку пересечения линий действия построенной силы \vec{F}_{12} и следующей силы \vec{F}_3 , переносим эти силы в точку пересечения линий действия и заменяем одной силой. В рассматриваемом случае задача решена:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\} \sim \{\vec{F}_{12}, \vec{F}_3\} \sim \vec{F}.$$

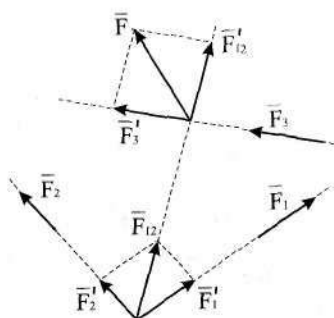


Рис. 3.2

При большем количестве сил в системе аналогичные операции продолжаются до тех пор, пока в результате упрощений не останется только одна сила. Эта сила и будет равнодействующей.

Универсальный способ построения равнодействующей основан на использовании теоремы о приведении системы сил к одному центру. Центр приведения $C(a, b, c)$ может быть выбран произвольно или задан по условию задачи. В том

случае, когда заданная система сил расположена в одной плоскости, основные характеристики системы — главный вектор и главный момент можно вычислить различными способами, условно говоря, графически и аналитически. Наличие такой возможности может быть использовано для проверки полученных результатов.

Рассмотрим систему сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, расположенную в координатной плоскости xy . Центр приведения $C(a, b, 0)$ также лежит в плоскости xy (рис. 3.4). Остановимся сначала на графическом способе определения главного вектора и главного момента, практически применимом только для систем сил, расположенных в одной плоскости.

Главный вектор \vec{R}^* определяется как замыкающая сторона построенного в масштабе сил силового многоугольника (рис. 3.3). В случае плоской системы сил момент любой из сил относительно точки C перпендикулярен координатной плоскости xy , т.е. имеет ненулевую проекцию только на ось z . Проекция этого момента на ось z по модулю равна произведению модуля силы на кратчайшее расстояние от точки C до линии действия силы (плечо силы) и положительна, если с положительного конца оси z поворот тела вокруг точки C под действием силы виден против хода часовой стрелки (отрицателен в противоположном случае).

Таким образом, проекцию на ось z главного момента относительно центра приведения C можно вычислить по формуле:

$$M_{cz}^* = \sum_{k=1}^n (\pm 1) |\vec{F}_k| h_k.$$

Плечи сил h_k можно измерить с учётом выбранного масштаба расстояний по чертежу (рис. 3.4). Таким образом,

$$\vec{M}_c^* = M_{cz}^* \vec{k},$$

где \vec{k} — единичный вектор координатной оси z .

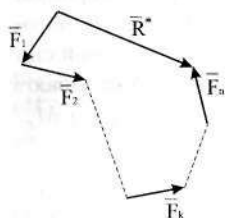


Рис. 3.3

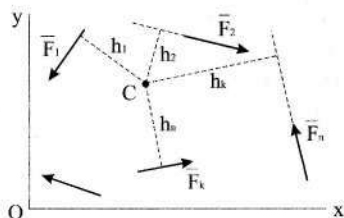


Рис. 3.4

Вычислим главный вектор и главный момент плоской системы сил аналитически. Будем считать, что силы заданы своими проекциями на оси координат $\vec{F}_k = \{F_{kx}, F_{ky}, 0\}$ и приложены в точках $A_k(x_k, y_k, 0)$.

Вычислим проекции главного вектора:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{ky}.$$

Тем самым определяем и проекции равнодействующей \vec{F} на координатные оси, так как $\vec{F} = \vec{R}^*$. Модуль равнодействующей находим по формуле

$$|\vec{F}| = |\vec{R}^*| = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2}.$$

Вычислим главный момент системы сил относительно центра C . По определению главного момента

$$\vec{M}_c^* = \sum_{k=1}^n \vec{M}_c(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n \vec{CA}_k \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_k - a & y_k - b & 0 \\ F_{kx} & F_{ky} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{k} \sum_{k=1}^n [(x_k - a) F_{ky} - (y_k - b) F_{kx}].$$

Отсюда

$$M_{cz}^* = \sum_{k=1}^n [(x_k - a) F_{ky} - (y_k - b) F_{kx}].$$

Остаётся упростить систему сил, состоящую из силы $\vec{R}_c = \vec{R}^*$, приложенной в точке C и пары сил с моментом $\vec{M}_c^* = M_{cz}^* \vec{k}$ (рис. 3.5). Из всех пар, момент которых равен \vec{M}_c^* , построим одну (\vec{F}', \vec{F}) таким образом, чтобы одна из сил этой пары \vec{F}' уравнивала силу \vec{R}_c . Для этого сила \vec{F}' должна быть приложена в точке C и $\vec{F}' = -\vec{R}_c = -\vec{R}^*$. Вторая сила этой пары \vec{F} располагается в плоскости xy таким образом, чтобы с конца вектора \vec{M}_c^* поворот пары был виден против хода часовой стрелки (рис. 3.6). Заметим, что при работе с плоской системой сил вектор главного момента обычно не изображают на чертеже. Указывают только направление вращения, создаваемого парой сил с моментом \vec{M}_c^* .

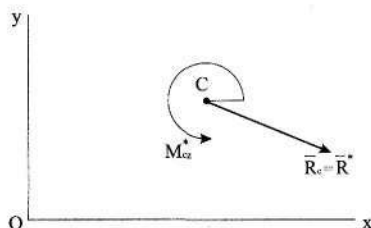


Рис. 3.5

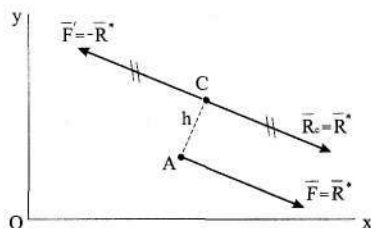


Рис. 3.6

Расстояние CA (плечо пары) определяем по формуле

$$h = CA = \frac{|\vec{M}_c|}{|\vec{F}|} = \frac{|\vec{M}_c^*|}{|\vec{R}^*|}.$$

Уравновешенную систему сил $\{\vec{R}_c, \vec{F}'\}$ можно отбросить. Таким образом, заданная система сил заменена одной силой \vec{F} , которая и будет равнодействующей.

При аналитическом способе решения задачи необходимо получить уравнение линии действия равнодействующей. В рассматриваемом случае плоской системы сил уравнение (2.6) принимает вид:

$$M_{cz}^* \vec{k} = \overrightarrow{CA} \times \vec{F} = \overrightarrow{CA} \times \vec{R}^* = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-a & y-b & 0 \\ R_x^* & R_y^* & 0 \end{vmatrix},$$

где x и y — координаты точки A , лежащей на линии действия равнодействующей. Отсюда получаем

$$M_{cz}^* = (x-a) R_y^* - (y-b) R_x^*.$$

В общем случае, когда заданная система сил произвольным образом расположена в пространстве, возможен только аналитический способ решения задачи. Особенности решения такой задачи рассмотрим на примере.

Пример 3.2. На куб, ребро которого a , действует система сил, как показано на рис. 3.7. Дано: $F_1 = F_3 = F_4 = P\sqrt{2}$; $F_2 = P$. Привести систему сил к простейшему виду.

За центр приведения принимаем начало координат O . Вычисляем проекции главного вектора на координатные оси:

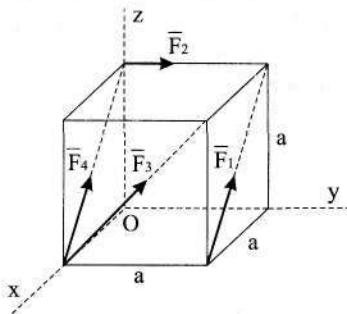


Рис. 3.7

$$R_x^* = -F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -2P;$$

$$R_y^* = F_2 + F_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2P;$$

$$R_z^* = F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 3P.$$

Вычисляем проекции главного момента \vec{M}_o^* на оси координат:

$$M_{ox}^* = F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} a - F_2 a = 0;$$

$$M_{oy}^* = -(F_1 + F_3 + F_4) \frac{\sqrt{2}}{2} a = -3Pa;$$

$$M_z^* = (F_1 + F_3) \frac{\sqrt{2}}{2} a = 2Pa.$$

Вычисляем второй статический инвариант:

$$J_2 = R_x^* M_{ox}^* + R_y^* M_{oy}^* + R_z^* M_{oz}^* = -6P^2 a + 6P^2 a = 0.$$

Поскольку $J_2 = 0$, $\vec{R}^* \neq 0$, приходим к выводу, что заданная система сил имеет равнодействующую, проекции которой на оси координат равны

$$F_x = R_x^* = -2P; \quad F_y = R_y^* = 2P; \quad F_z = R_z^* = 3P.$$

Находим линию действия равнодействующей. Подставляя вычисленные величины в уравнения (2.7), получаем (при $q = 0$):

$$0 = 3Py - 2Pz; \quad -3Pa = -2Pz - 3Px; \quad 2Pa = 2Px + 2Py$$

или

$$0 = 3y - 2z; \quad 3a = 3x + 2z; \quad a = x + y.$$

Можно проверить правильность расчётов, для чего следует убедиться в линейной зависимости полученных уравнений. Например, выражаем y через z из первого уравнения, x через z из второго и проверяем тождественность третьего:

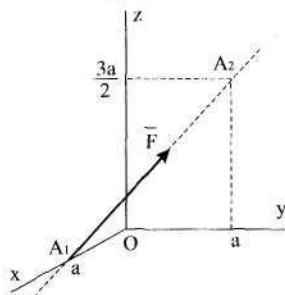


Рис. 3.8

$$\frac{3a - 2z}{3} + \frac{2z}{3} \equiv a.$$

Любая прямая полностью определяется двумя точками. Найдём точки пересечения линии действия равнодействующей с координатными плоскостями xy и yz . Полагая $z_1 = 0$, находим $x_1 = a$; $y_1 = 0$. Полагая $x_2 = 0$, находим $y_2 = a$; $z_2 = 3/2$. Полученный результат представлен на рис. 3.8.

3.3 Системы сил, эквивалентные динамическому винту

К динамическому винту может приводиться только пространственная система сил. Анализ такой системы обычно проводят аналитическими методами.

Пример 3.3. На куб, ребро которого a , действует система сил, как показано на рис. 3.9. Дано: $F_1 = F_2 = P\sqrt{2}$; $F_3 = P$. Привести систему сил к простейшему виду.

За центр приведения принимаем начало координат O . Вычисляем проекции главного вектора на координатные оси:

$$R_x^* = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$R_y^* = -F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -P;$$

$$R_z^* = F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 = 2P.$$

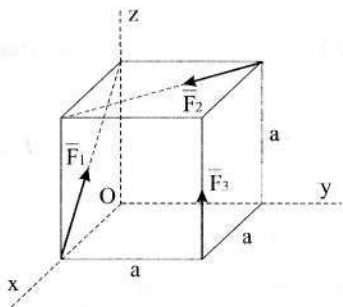


Рис. 3.9

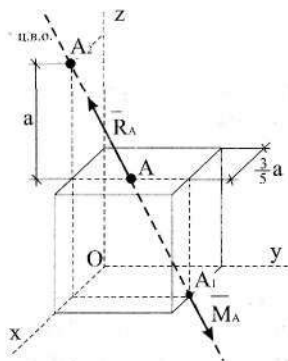


Рис. 3.10

Вычисляем проекции главного момента \vec{M}_O^* на оси координат:

$$M_{ox}^* = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} a + F_3 a = 2Pa;$$

$$M_{oy}^* = -F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} a + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} a - F_3 a = -Pa;$$

$$M_{oz}^* = -F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} a = -Pa.$$

Второй статический инвариант

$$J_2 = R_x^* M_{ox}^* + R_y^* M_{oy}^* + R_z^* M_{oz}^* = P^2 a - 2P^2 a = -P^2 a$$

отличен от нуля, следовательно, система сил приводится к динамическому винту.

Сила, входящая в динамический винт, по модулю и направлению совпадает с главным вектором:

$$|\vec{R}| = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2 + (R_z^*)^2} = P\sqrt{5}.$$

Вычисляем модуль момента пары сил, входящей в динамический винт. Используя формулу (2.5), получаем

$$|\vec{M}_A| = \frac{|J_2|}{|\vec{R}|} = \frac{\sqrt{5}}{5} Pa.$$

Параметр динамы:

$$p = \frac{J_2}{|\vec{R}|^2} = -\frac{a}{5}.$$

Уравнения центральной винтовой оси (2.7) в рассматриваемом случае принимают вид:

$$2Pa - (2Py + Pz) = 0; \quad -Pa - (-2Px) = \frac{a}{5}P; \quad -Pa + (Px) = -\frac{2}{5}Pa$$

или

$$2a = 2y + z; \quad x = \frac{3}{5}a.$$

Определяем координаты точек пересечения центральной винтовой оси с координатными плоскостями xy и xz :

$$A_1\left(\frac{3}{5}a, a, 0\right); \quad A_2\left(\frac{3}{5}a, 0, 2a\right).$$

Результаты представлены на рис. 3.10.

Глава 4

Объёмные и поверхностные силы

До сих пор мы оперировали так называемыми сосредоточенными силами, которые имеют определённую точку приложения (или линию действия). Сосредоточенная сила является одной из абстракций, используемых в механике. Реальные взаимодействия материальных тел всегда представляются распределёнными либо по объёму тела, либо по его поверхности. К поверхностным силам относятся силы давления, т.е. силы контактного действия, а к объёмным — гравитационные и электромагнитные силы. Сосредоточенные силы появляются в теории как равнодействующие поверхностных или объёмных сил.

4.1 Центр параллельных сил

При изучении объёмных и поверхностных сил широко используется центр параллельных сил. Это понятие вводится для системы параллельных сил, имеющих равнодействующую, причём точки приложения сил системы A_k считаются фиксированными.

Центром параллельных сил называется точка, вокруг которой поворачивается равнодействующая системы параллельных сил при повороте всех сил системы вокруг своих точек приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол.

Найдём положение центра параллельных сил C для системы $\{\vec{F}_k\}$, имеющей равнодействующую \vec{F} . Пусть \vec{e} — единичный вектор, параллельный линиям действия сил системы (рис.4.1). Тогда $\vec{F}_k = F_k \vec{e}$, где F_k

— проекция силы на направление единичного вектора \vec{e} . Для равнодействующей получаем:

$$\vec{F} = F \vec{e} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \vec{e} \sum_{k=1}^n F_k.$$

Используя теорему Вариньона (2.8), получаем:

$$\overrightarrow{OC} \times \vec{F} = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} \times \vec{F}_k \quad \text{или} \quad \overrightarrow{OC} \times F \vec{e} = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} \times F_k \vec{e}.$$

Вынося за скобку общий множитель \vec{e} , получаем:

$$\left(F \cdot \overrightarrow{OC} - \sum_{k=1}^n F_k \cdot \overrightarrow{OA_k} \right) \times \vec{e} = 0 \quad \text{или} \quad \vec{a} \times \vec{e} = 0,$$

где

$$\vec{a} = F \cdot \overrightarrow{OC} - \sum_{k=1}^n F_k \cdot \overrightarrow{OA_k}.$$

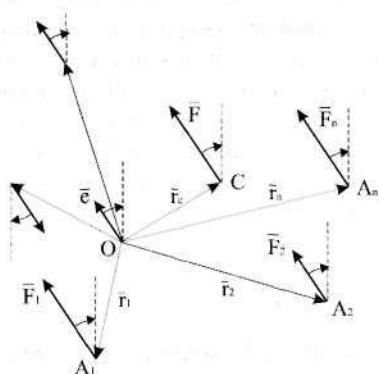


Рис. 4.1

Векторное произведение равно нулю, если один из сомножителей равен нулю или если сомножители коллинеарны. Но $|\vec{e}| \neq 0$. Повернём все силы системы вокруг своих точек приложения в одну и ту же сторону на один и тот же угол (рис. 4.1). Равнодействующая системы сил повернётся вокруг точки C в ту же сторону на тот же угол. Вместе с силами поворачивается вокруг точки O и вектор \vec{e} . В результате этой операции вектор \vec{e} изменит направление; вектор \vec{a} останется неизменным, но снова $\vec{a} \times \vec{e} = 0$. Следовательно, $\vec{a} = 0$, т.е.

$$\overrightarrow{OC} \cdot F = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OA_k} \cdot F_k = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \cdot F_k.$$

Отсюда

$$\vec{r}_c = \overrightarrow{OC} = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^n F_k \vec{r}_k. \quad (4.1)$$

Примем точку O за начало декартовой системы координат. Записывая формулу (4.1) в проекциях на координатные оси, получаем координаты центра параллельных сил:

$$x_c = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^n x_k F_k; \quad y_c = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^n y_k F_k; \quad z_c = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^n z_k F_k.$$

4.2 Центр тяжести

Рассмотрим материальное тело, расположенное вблизи поверхности Земли (в поле земного притяжения). Допустим сначала, что тело состоит из конечного числа материальных точек, другими словами — частиц, размерами которых можно пренебречь. На каждую частицу действует сила тяжести \vec{P}_k . Если размеры тела малы по сравнению с размерами Земли, то систему сил тяжести частиц можно рассматривать как систему параллельных сил, направленных в одну сторону. Такая система сил всегда имеет равнодействующую

$$\vec{P} = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k, \quad \text{модуль которой} \quad P = \sum_{k=1}^n P_k$$

часто называют весом тела. При любом изменении ориентации тела по отношению к Земле силы тяжести частиц остаются вертикальными, т.е. они поворачиваются по отношению к телу вокруг своих точек приложения. Линия действия силы тяжести тела \vec{P} при этом всегда будет проходить через определённую точку — центр параллельных сил, который в рассматриваемом случае называется центром тяжести тела. Таким образом, положение центра тяжести тела, состоящего из конечного числа частиц, можно определить по формуле (4.1):

$$\vec{r}_c = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^n P_k \vec{r}_k. \quad (4.2)$$

При определении положения центра тяжести сплошного тела это тело разбивается сечениями, параллельными координатным плоскостям, на элементарные объёмы (рис. 4.2) и центр тяжести тела определяется как предел последовательности радиусов-векторов центров тяжести системы элементарных объёмов (частиц) при объёме каждой частицы, стремящемся к нулю:

$$\vec{r}_c = \lim_{\Delta P_k \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \vec{r}_k \Delta P_k}{\sum_{k=1}^n \Delta P_k},$$

где \vec{r}_k — радиус-вектор центра элементарного объёма; ΔP_k — вес частицы.

Этот предел представляет собой, по определению, интеграл

$$\vec{r}_c = \frac{1}{P} \int_P \vec{r} dP.$$

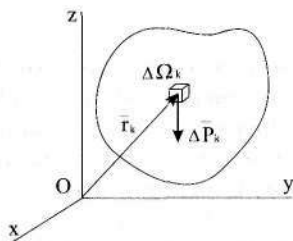


Рис. 4.2

При вычислении подобных интегралов переходят к интегрированию по объёму, для чего вводится понятие удельного веса

$$\gamma(\vec{r}) = \gamma(x, y, z) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\Omega} = \frac{dP}{d\Omega},$$

где $\Delta\Omega$ — элемент объёма.

Таким образом,

$$\vec{r}_c = \frac{\int \gamma(\vec{r}) d\Omega}{\int \gamma(\vec{r}) d\Omega}. \quad (4.3)$$

Формула (4.3) является наиболее общей для определения положения центра тяжести сплошного тела.

Если удельный вес тела не зависит от координат, тело называется однородным. Для однородных тел, полагая в формуле (4.3) $\gamma(\vec{r}) = \text{const}$, получаем

$$\vec{r}_c = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \vec{r} d\Omega, \quad (4.4)$$

где Ω — объём тела.

Если однородное тело представляет собой пластину постоянной толщины $h = \text{const}$, то $d\Omega = h dS$; $\Omega = h S$, где S — площадь поверхности пластины. В этом случае для определения положения центра тяжести тела необходимо вычислить поверхностный интеграл:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{S} \int_S \vec{r} dS. \quad (4.5)$$

Если однородное тело представляет собой стержень с постоянной площадью поперечного сечения $\sigma = \text{const}$, то $d\Omega = \sigma dl$; $\Omega = \sigma L$ и формула (4.4) принимает вид:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{L} \int_L \vec{r} dl. \quad (4.6)$$

где L — длина стержня.

Во многих случаях положение центра тяжести тела можно определить при помощи весьма простых методов. Рассмотрим некоторые из них.

Симметрия однородных тел. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости. Для доказательства этого утверждения примем плоскость симметрии за координатную плоскость xy . Записывая формулу (4.4) в проекциях на координатную ось z , получаем

$$z_c = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} z d\Omega = \frac{1}{\Omega} \left(\int_{\Omega_1} z d\Omega + \int_{\Omega_2} z d\Omega \right) = 0,$$

поскольку область интегрирования разбивается на две симметричные области Ω_1 и Ω_2 , в первой из которых $z > 0$, а во второй $z < 0$.

Аналогично можно показать, что если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси; если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела совпадает с его центром симметрии.

Метод разбиений состоит в том, что тело разбивается на конечное число частей, положение центров тяжести которых известно. Положение центра тяжести тела определяется по формуле (4.2).

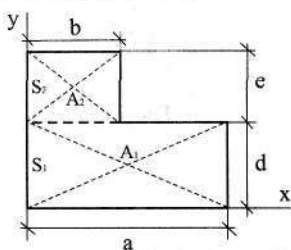


Рис. 4.3

Пример 4.1. Определить положение центра тяжести однородной пластины, изображённой на рис. 4.3.

Разобьём пластину на два прямоугольника с площадями $S_1 = ad$ и $S_2 = be$. Прямоугольники обладают осевой симметрией и их центры тяжести находятся в точке пересечения диагоналей:

$$x_1 = \frac{a}{2}; \quad y_1 = \frac{d}{2}; \quad x_2 = \frac{b}{2}; \quad y_2 = d + \frac{e}{2}.$$

Для однородной пластины постоянной толщины вес пропорционален площади поверхности. В проекциях на координатные оси из формулы (4.2) получаем:

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{a^2 d + b^2 e}{2(ad + be)}; \quad y_c = \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2}{S_1 + S_2} = \frac{ad^2 + (2d + e)be}{2(ad + be)}.$$

Метод дополнений или **метод отрицательных масс** представляет собой частный случай метода разбиений, применяется для тел, имеющих вырезы (полости), вес которых (для однородных тел — объём или площадь) считается отрицательным.

Пример 4.2. Определить положение центра тяжести однородной пластины, изображённой на рис. 4.4.

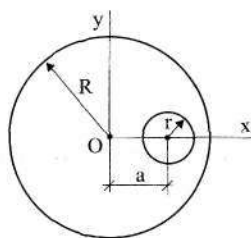


Рис. 4.4

Прежде всего заметим, что пластина имеет ось симметрии, проходящую через центр пластины и центр выреза. Примем эту ось за координатную ось x . Тогда $y_c = 0$.

Разобьём пластину на две части: круг без выреза радиуса R и вырез радиуса r . При этом

$$x_1 = 0; \quad S_1 = \pi R^2; \quad x_2 = a; \quad S_2 = -\pi r^2.$$

Используя формулу (4.2), получаем:

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} = -\frac{r^2 a}{R^2 - r^2}.$$

Пример 4.3. Определить положение центра тяжести однородной треугольной пластины, изображённой на рис. 4.5.

Разобьём треугольник на элементарные полоски, параллельные одной из сторон, например, стороне AB . Центр тяжести каждой полоски в силу симметрии лежит на её середине, а центр тяжести треугольника расположен, следовательно, на медиане DD' . Проводя аналогичное разбиение параллельно другой стороне, например, AD , получаем, что центр тяжести лежит на медиане BB' . Таким образом, центр тяжести однородного треугольника расположен в точке пересечения его медиан.

Пример 4.4. Определить положение центра тяжести однородной дуги окружности радиуса R с центральным углом 2α (рис. 4.6).

Начало координат совместим с центром окружности, ось x направим перпендикулярно хорде AB , стягивающей дугу. В этом случае ось x будет осью симметрии тела и, следовательно, $y_c = 0$. Для вычисления x_c

используем формулу (4.6):

$$x_c = \frac{1}{L} \int_L x dl,$$

причём,

$$x = R \cos \varphi; \quad L = 2R\alpha; \quad dl = R d\varphi.$$

Тогда

$$x_c = \frac{1}{2R\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \varphi d\varphi = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

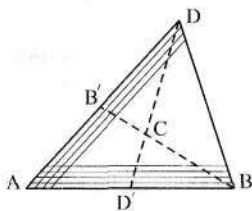


Рис. 4.5

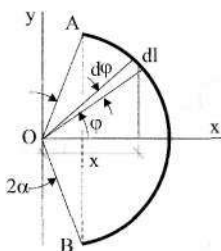


Рис. 4.6

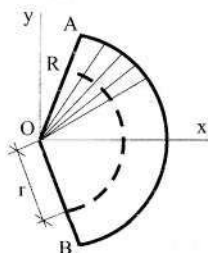


Рис. 4.7

Пример 4.5. Определить положение центра тяжести однородного кругового сектора радиуса R с центральным углом 2α (рис. 4.7).

Разобьём пластину на элементарные круговые секторы. Каждый элементарный сектор можно рассматривать как равнобедренный треугольник, центр тяжести которого расположен в точке пересечения медиан, которые, как известно, делятся точкой пересечения в отношении 2:1. Таким образом, центр тяжести рассматриваемого кругового сектора совпадает с центром тяжести однородной дуги окружности радиуса $r = 2/3 R$ и таким же центральным углом. Используя результат, полученный в предыдущем примере, находим:

$$x_c = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

В заключение заметим, что при определении положения центра тяжести как вид результата, так и трудоёмкость его получения существенно зависят от выбора системы координат.

4.3 Распределённая нагрузка

Поверхностные и объёмные силы представляют собой нагрузку, распределённую по некоторой поверхности или объёму. Такая нагрузка задаётся интенсивностью q , которая представляет собой силу, отнесённую или к некоторому объёму, или к некоторой площади, или к некоторой длине.

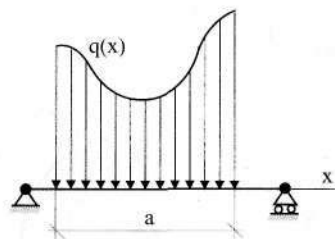


Рис. 4.8

силу, приходящуюся на единицу длины.

Плоская фигура, ограниченная балкой и кривой интенсивности нагрузки, называется эпюрой распределённой нагрузки (рис. 4.8). Если по характеру решаемой задачи можно не учитывать деформации, т.е. можно считать тело абсолютно твёрдым, то распределённую нагрузку можно (и нужно) заменить равнодействующей. Хотя модуль равнодействующей и координата её точки приложения определяются так же, как определяется модуль равнодействующей системы параллельных сил и координаты центра параллельных сил, рассмотрим процедуру получения искомых величин ещё раз применительно к случаю распределённой нагрузки.

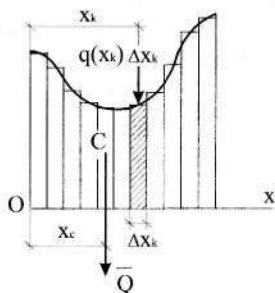


Рис. 4.9

Разобьём балку на n отрезков длиной Δx_k , на каждом из которых будем считать интенсивность постоянной и равной $q(x_k)$, где x_k — координата середины отрезка Δx_k . При этом кривая интенсивности заменяется ломаной линией, а нагрузка, приходящаяся на отрезок Δx_k , заменяется сосредоточенной силой $q(x_k)\Delta x_k$, приложенной в точке x_k (рис. 4.9). Полученная система параллельных сил имеет равнодействующую, равную сумме сил, действующих на каждый из отрезков, при-

ложенную в центре параллельных сил.

Понятно, что такое представление тем точнее описывает реальную ситуацию, чем меньше отрезок Δx_k , т.е. чем больше число отрезков n . Точный результат получаем, переходя к пределу при длине отрезка Δx_k , стремящейся к нулю. Предел, получаемый в результате описанной процедуры, представляет собой интеграл. Таким образом, для модуля равнодействующей получаем

$$Q = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n q(x_k) \Delta x_k = \int_0^a q(x) dx.$$

Для определения координаты точки приложения равнодействующей используем формулу (4.1). Записывая эту формулу для системы сил $q(x_k)\Delta x_k$ в проекциях на ось x и переходя к пределу при длине отрезков, стремящейся к нулю, получаем:

$$x_c = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n x_k q(x_k) \Delta x_k}{\sum_{k=1}^n q(x_k) \Delta x_k} = \frac{1}{Q} \int_0^a x q(x) dx.$$

Очевидно, модуль равнодействующей численно равен площади эшоры распределённой нагрузки, а точка её приложения совпадает с центром тяжести однородной пластины, имеющей форму эшоры распределённой нагрузки.

Отметим два часто встречающихся случая.

1. *Равномерно распределённая нагрузка*, $q(x) = \text{const} = q_0$ (рис. 4.10). Модуль равнодействующей и координата её точки приложения определяются по формулам:

$$Q = \int_0^a q(x) dx = q_0 \int_0^a dx = q_0 a;$$

$$x_c = \frac{1}{Q} \int_0^a x q(x) dx = \frac{q_0}{Q} \int_0^a x dx = \frac{a}{2}.$$

В инженерной практике такая нагрузка встречается довольно часто. Равномерно распределённой в большинстве случаев можно считать весовую или ветровую нагрузку.

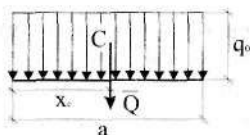


Рис. 4.10

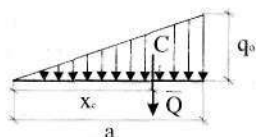


Рис. 4.11

2. *Линейно распределённая нагрузка*, $q(x) = \frac{q_0}{a} x$ (рис. 4.11). В этом случае:

$$Q = \int_0^a q(x) dx = \frac{q_0}{a} \int_0^a x dx = \frac{1}{2} q_0 a;$$

$$x_c = \frac{1}{Q} \int_0^a x q(x) dx = \frac{2}{3} \int_0^a x^2 dx = \frac{2}{3} a.$$

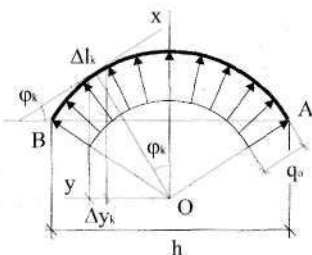


Рис. 4.12

В частности, давление воды на вертикальную стенку прямо пропорционально глубине.

В заключение рассмотрим случай нагрузки, *равномерно распределённой по дуге окружности* (рис. 4.12). Примером такой нагрузки может служить гидростатическое давление на боковые стенки цилиндрического сосуда. Из соображений симметрии очевидно, что сумма

проекций сил на ось y , перпендикулярную оси симметрии, равна нулю и $y_c = 0$. Следовательно, равнодействующая направлена вдоль оси x :

$$Q = \lim_{\Delta l_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n q_0 \Delta l_k \cos \varphi_k,$$

где $q_0 \Delta l_k$ — сила, действующая на элемент дуги длиной Δl_k ; φ_k — угол, образуемый этой силой с осью x , причём $\Delta l_k \cos \varphi_k = \Delta y_k$. Тогда

$$Q = \lim_{\Delta l_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n q_0 \Delta y_k = q_0 (y_B - y_A) = q_0 h.$$

Таким образом, модуль равнодействующей равен произведению интенсивности на длину хорды, стягивающей дугу AB .

Глава 5

Равновесие несвободного тела

5.1 Методика решения задач

Во многих случаях, встречающихся в инженерной практике, заранее известно, что некоторое тело находится в равновесии. Например, оно соответствующим образом закреплено (имеет опоры). На тело действуют заданные силы, которые называют активными. Природа активных сил, как правило, не указывается, т.е. неважно, какие тела и по каким физическим законам взаимодействуют с рассматриваемым телом, дан только результат этого взаимодействия в виде сил. Под действием активной нагрузки тело оказывает давление на опоры (связи), со стороны которых, в соответствии с третьим законом Ньютона, возникают реакции связей. Задача состоит в определении сил реакций связей.

Сила реакции связи заранее неизвестна, она зависит от приложенных к телу активных сил и вида самой связи. Заранее можно только утверждать, что сила реакции связи направлена в сторону, противоположную той, куда данная связь не даёт перемещаться телу.

При решении задач об определении сил реакций опор предлагается следующая последовательность действий.

1. Выбрать тело (или систему тел), равновесие которого будет рассматриваться, и изобразить на чертеже приложенную к выбранному телу активную нагрузку.

2. Ввести реакции связей, изобразив силы реакций на чертеже. Если направление сил реакций заранее неизвестно, необходимо показать их составляющие.

3. Составить условия равновесия для системы сил, приложенной к рассматриваемому телу, и определить неизвестные. Эта система сил состоит из всех активных сил и всех реакций внешних связей.

5.2 Основные виды связей

1. Гибкая невесомая нерастяжимая нить. Нить не даёт телу перемещаться в единственном направлении — вдоль нити от точки закрепления (на растяжение нити). Реакция такой нити \vec{T} всегда направлена вдоль нити к точке подвеса (рис. 5.1).

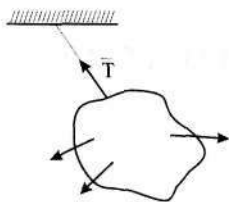


Рис. 5.1

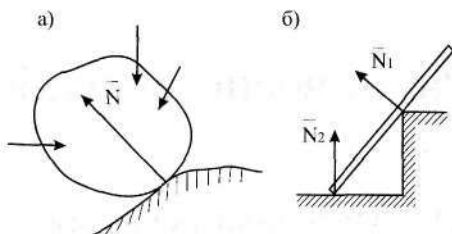


Рис. 5.2

2. Гладкая (без трения) поверхность. Реакция такой поверхности направлена по общей нормали к поверхностям тел, проведённой в точке контакта, причём наружу от опорной поверхности (рис. 5.2а). Если в точке контакта у одной из поверхностей нормаль не определена (рис. 5.2б), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.

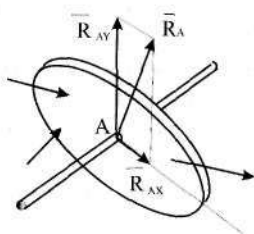


Рис. 5.3

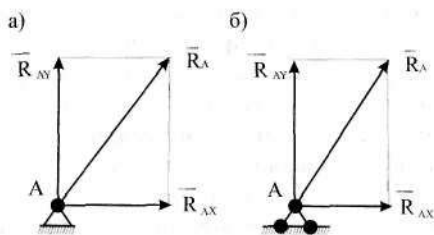


Рис. 5.4

3. Неподвижный цилиндрический шарнир (подшипник). Простейшую схему такой опоры можно представить следующим образом: имеется закреплённый стержень, на который надета пластина (рис. 5.3). Такая опора позволяет пластине скользить вдоль стержня и вращаться вокруг него. Под действием активной нагрузки возникает точечный контакт между стержнем и пластиной того же типа, что и в случае гладкой поверхности. Реакция направлена по нормали к стержню (оси шарнира),

но заранее неизвестно в какой точке осуществляется контакт и, следовательно, по какой из нормалей к оси шарнира будет направлена реакция.

Таким образом, в общем случае реакция неподвижного шарнира расположена в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, но в этой плоскости она заранее неизвестна ни по модулю, ни по направлению. Для её определения удобно ввести две неизвестные по модулю составляющие, направленные параллельно координатным осям.

Размерами шарнира при расчётах пренебрегают. Схематическое изображение неподвижного шарнира представлено на рис. 5.4. В некоторых случаях (когда тело находится в равновесии под действием двух или трёх сил) удастся заранее определить линию действия реакции неподвижного шарнира.

4. Подвижный цилиндрический шарнир представляет собой цилиндрический шарнир, поставленный на катки, на которых он может без сопротивления перемещаться по опорной поверхности. Реакция направлена по нормали к опорной поверхности. Схематическое изображение такой опоры и её реакция представлены на рис. 5.5.

5. Невесомый ненагруженный стержень. Рассмотрим равновесие стержня AB (рис. 5.6). Он находится в равновесии под действием двух сил реакций шарниров, приложенных в точках A и B . Две силы могут уравновесить друг друга только в том случае, когда они действуют по одной прямой. Таким образом, сила давления тела на стержень AB направлена вдоль стержня. Учитывая третий закон Ньютона, приходим к выводу, что реакция ненагруженного стержня направлена вдоль прямой, соединяющей шарнирно закреплённые концы стержня.

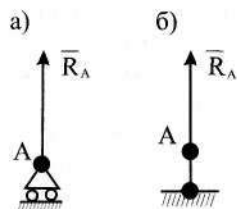


Рис. 5.5

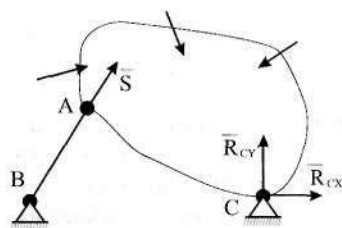


Рис. 5.6

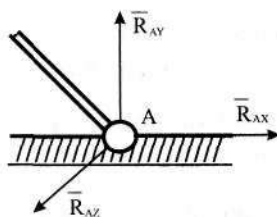


Рис. 5.7

Теперь представляется возможным изобразить неподвижный (рис. 5.4б) и подвижный (рис. 5.5б) шарниры как систему шарнирно закреплённых на концах стержней.

6. Сферический шарнир представляет собой шарик, заключённый в неподвижную сферическую оболочку (рис. 5.7). Реакция сферического шарнира проходит через центр шара и может иметь любое направление в пространстве. При решении задач имеет смысл вводить три взаимно перпендикулярные составляющие реакции. Схематически сферический (шаровой) шарнир изображается жирной точкой.

7. Жёсткая заделка. Рассмотрим балку, один конец которой заделан в стену (рис. 5.8). Подобно неподвижному шарниру, жёсткая заделка препятствует любым перемещениям конца балки и, следовательно, создаёт неизвестную по модулю и направлению силу реакции. Но в отличие от шарнира, заделка препятствует любым поворотам балки, создавая кроме силы реакции ещё и пару сил, направление и модуль момента которой заранее неизвестны. Таким образом, в общем случае получаем в качестве неизвестных три проекции силы реакции на координатные оси и три момента реакции относительно координатных осей.

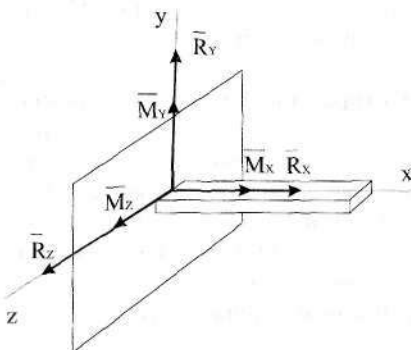


Рис. 5.8

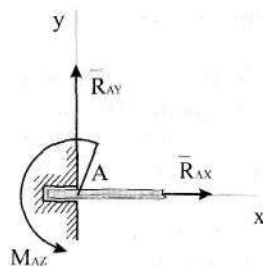


Рис. 5.9

Особый интерес представляет случай, когда система активных сил расположена в одной плоскости (например, в координатной плоскости xy). В этом случае система сил реакций также будет плоской и реакция заделки будет представлена тремя составляющими: двумя проекциями силы R_x и R_y и одной проекцией момента M_z (рис. 5.9).

8. Скользящая заделка (поршень, ползун). В отличие от жёсткой заделки, такая опора позволяет балке перемещаться вдоль направляющих. Схематическое изображение представлено на рис. 5.10. Соединение

стержней при помощи скользящей заделки изображено на рис. 5.11, где показаны и реакции соединения.

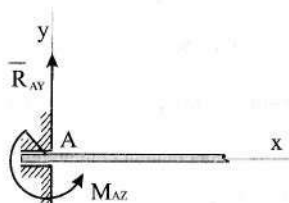


Рис. 5.10

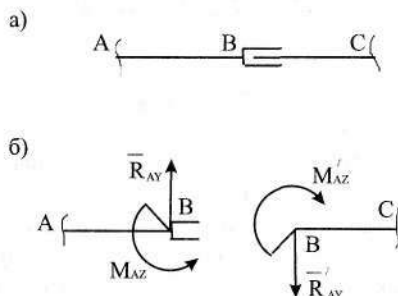


Рис. 5.11

5.3 Задачи статически определённые и неопределённые

Пусть к несвободному, находящемуся в покое твёрдому телу приложена некоторая неуравновешенная система активных сил. В соответствии с принципом освобождения от связей отбросим связи, заменив их механическое действие силами реакций. Поскольку по условию тело находится в покое, система сил, состоящая из активных сил и сил реакций, будет уравновешенной. Составляя для этой системы сил условия равновесия, получаем в общем случае шесть уравнений, связывающих проекции на координатные оси активных сил и сил реакций связей. Если число неизвестных равно или меньше числа уравнений равновесия, содержащих эти неизвестные, то задача определения неизвестных сил реакций связей называется статически определённой. Если же число неизвестных больше числа уравнений равновесия, то задача определения сил реакций связей будет статически неопределённой. Для статически неопределённой задачи найти все силы реакций связей, используя только методы статики, невозможно. Для решения таких задач приходится прибегать к рассмотрению упругих свойств тел. Статическая неопределённость является следствием наложения на абсолютно твёрдое тело лишних связей, не требующихся для обеспечения его равновесия.

Вопросы решения статически неопределённых задач выходят за рамки теоретической механики, но чтобы иметь хотя бы предварительные представления о подобных задачах, рассмотрим простой пример.

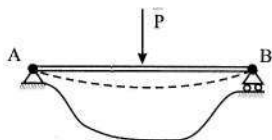


Рис. 5.12

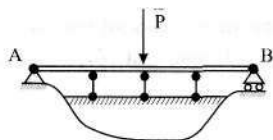


Рис. 5.13

Представим себе, что через некое препятствие (яма, ручей, канава) переброшен мостик из подручных материалов (рис. 5.12). Для обеспечения равновесия такого мостика (если считать его абсолютно твёрдым телом) достаточно двух опор — одного неподвижного и одного подвижного шарниров. Однако в действительности под действием значительных нагрузок такой мостик может сломаться. Чтобы не допускать опасных деформаций, требуются дополнительные опоры, ненужные для обеспечения равновесия абсолютно твёрдого тела (рис. 5.13). Такая задача становится статически неопределимой и может быть решена только с учётом причины, по которой появились дополнительные связи, — с учётом деформаций.

5.4 Условия равновесия несвободного твёрдого тела

Если какие-либо из уравнений равновесия системы сил, состоящей из активных сил и сил реакций связей, не содержат силы реакций связей, то эти уравнения принято называть условиями равновесия несвободного твёрдого тела. Это условия, налагаемые на активные силы и геометрические характеристики, при выполнении которых действие активных сил на частично закреплённое тело не нарушает его равновесного состояния. Рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть абсолютно твёрдое тело закреплено при помощи шарового шарнира (рис. 5.14). Такое тело может поворачиваться вокруг точки O . Тело нагружено системой активных сил $\{\vec{F}_k\}$. Из шести условий равновесия системы сил, состоящей из активных сил и сил реакций связей:

$$\begin{aligned}
 R_{ox} + \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & R_{oy} + \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & R_{oz} + \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \\
 \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) &= 0; & \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) &= 0; & \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) &= 0.
 \end{aligned}$$

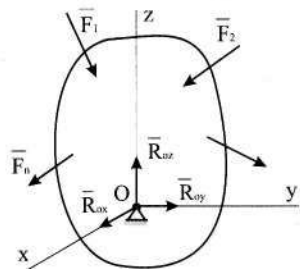


Рис. 5.14

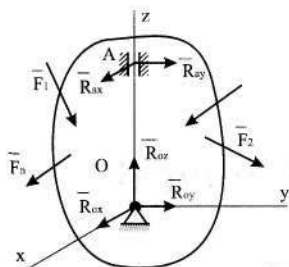


Рис. 5.15

Три уравнения моментов не содержат сил реакций связей; они налагают ограничения на систему приложенных к телу активных сил и являются условиями равновесия тела, имеющего одну шарнирно закреплённую точку.

2. Пусть точка O тела закреплена при помощи шарового шарнира, а в точке A установлен цилиндрический шарнир (рис. 5.15). Такое тело может вращаться вокруг оси, проходящей через закреплённые точки. Принимая ось вращения тела за координатную ось z и составляя условия равновесия для системы сил, действующей на тело, замечаем, что только сумма моментов относительно оси вращения тела

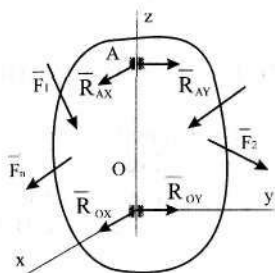


Рис. 5.16

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0$$

не содержит опорных реакций; это равенство налагает условия на систему активных сил и является условием равновесия тела, имеющего ось вращения.

3. Допустим, что в точке O тела, рассмотренного в предыдущем примере, установлен не шаровой, а цилиндрический шарнир (рис. 5.16). Такое тело, кроме возможности вращения вокруг оси z , получает возможность скользить вдоль этой оси. Реакции связей не дают проекций на ось z и не создают моментов относительно этой оси. Условия равновесия имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Глава 6

Примеры решения задачи определения статических реакций

6.1 Равновесие системы сходящихся сил

Пусть линии действия всех сил системы $\{\vec{F}_k\}$ пересекаются в одной точке C . Момент любой силы системы относительно точки C равен нулю и, следовательно, главный момент системы сходящихся сил относительно точки C равен нулю. В таком случае формула (1.3) принимает вид:

$$\vec{M}_O^* = \vec{OC} \times \vec{R}^*, \quad (6.1)$$

где O — произвольно выбранная точка.

Из формулы (6.1) следует:

1. Второй статический инвариант системы сходящихся сил всегда равен нулю.
2. Если главный вектор системы сходящихся сил равен нулю, то и главный момент системы относительно любой точки равен нулю, т.е. в этом случае система сходящихся сил уравновешена.

Таким образом, система сходящихся сил не может приводиться к динамическому винту или паре сил. Она или имеет равнодействующую, линия действия которой проходит через точку C , или уравновешена, если главный вектор системы сил равен нулю.

Условия равновесия системы сходящихся сил можно сформулировать или в аналитической форме:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0,$$

или в геометрической форме:

для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из сил системы, был замкнут.

Пример 6.1. Груз E весом G поддерживается стержнем AC , шарнирно закреплённым в точке A и наклонённым под углом α к вертикали, и двумя горизонтальными тросами BC и DC одинаковой длины (рис. 6.1). Пренебрегая весом стержня и тросов, определить усилие в стержне и натяжения тросов, если $\angle DBC = \angle BDC = \beta$.

Рассмотрим равновесие узла C . На узел C действуют реакция \vec{P} нити CE , численно равная весу груза G , реакции \vec{T}_1 и \vec{T}_2 тросов BC и DC , модули которых равны натяжениям тросов, и реакция \vec{S} стержня AC , равная по модулю искомому усилию в этом стержне. Реакции тросов направлены вдоль тросов. Невесомый стержень AC нагружен только на концах и, следовательно, его реакция направлена по прямой AC . Заранее неизвестно, растянут стержень или сжат, предположим, что он растянут. Система сил, действующих на узел C , представлена на рис. 6.2.

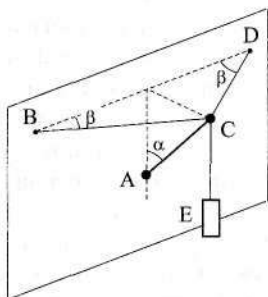


Рис. 6.1

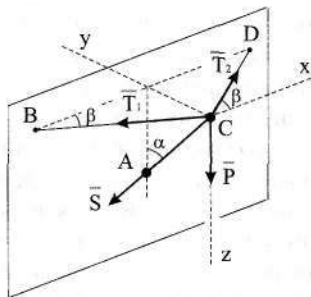


Рис. 6.2

Выбирая оси координат, как показано на рис. 6.2, составляем условия равновесия:

$$\begin{aligned}T_2 \cos \beta - T_1 \cos \beta &= 0; \\T_1 \sin \beta + T_2 \sin \beta + S \sin \alpha &= 0; \\P + S \cos \beta &= 0.\end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$S = -\frac{P}{\cos \alpha}; \quad T_1 = T_2 = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta} P, \quad \text{причём} \quad P = G.$$

Отрицательный знак, полученный в решении для значения S , говорит о том, что стержень AC не растянут, как было предположено, а сжат.

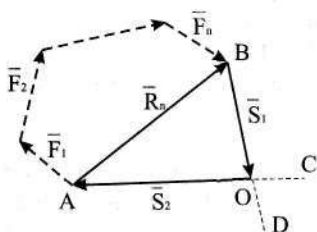


Рис. 6.3

В геометрической форме условия равновесия можно сформулировать следующим образом: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из сил системы, был замкнут.

Геометрическую форму условий равновесия можно использовать в случае плоской системы сходящихся сил. Как правило, в ходе решения задачи требуется построить многоугольник, у кото-

рого все стороны известны по направлению и только две неизвестны по величине. В конечном счёте задача сводится к построению треугольника, поскольку всегда можно построить сумму \vec{R}_n заданных сил (рис. 6.3). Построение треугольника начинается с заданной силы \vec{R}_n . Через начало и конец силы \vec{R}_n проведём прямые (AC и BD), параллельные линиям действия неизвестных сил \vec{S}_1 и \vec{S}_2 . Таким образом, определяются положение вершины O силового многоугольника и, следовательно, величины двух его сторон, длины которых равны модулям неизвестных сил \vec{S}_1 и \vec{S}_2 . Можно проводить построение в определённом масштабе. Тогда величины неизвестных сил определяются измерением по чертежу длин соответствующих сторон. Однако, во многих случаях имеет смысл рассчитать силовой треугольник. При таком расчёте используют известные геометрические и тригонометрические положения: теорему Пифагора, теорему синусов, теорему косинусов, подобие и т.д.

Пример 6.2. Однородный цилиндр весом P и радиусом r опирается на два уступа в точках A и B (рис. 6.4). Размеры указаны на чертеже. Определить реакции опор.

Рассмотрим равновесие цилиндра. На него действуют сила тяжести \vec{P} , реакция опоры A (\vec{R}_A) и реакция опоры B (\vec{R}_B), причём, эти реакции направлены по нормали к поверхности цилиндра, т.е. их линии действия проходят через центр цилиндра. Таким образом, на цилиндр действует система сходящихся сил. Построим силовой треугольник (рис. 6.5). Сначала в выбранном масштабе изображаем вектор, равный силе \vec{P} . Через начало этого вектора проводим прямую, параллельную линии действия силы \vec{R}_B , а через конец — прямую, параллельную линии действия силы \vec{R}_A . Направления сил определяются из условия равенства нулю суммы сил.

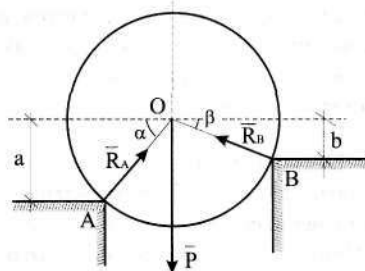


Рис. 6.4

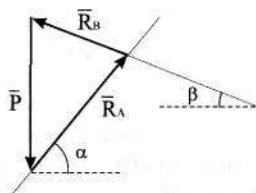


Рис. 6.5

Для определения длин сторон силового треугольника, т.е. для определения модулей сил \vec{R}_A и \vec{R}_B , удобно ввести углы α и β (рис. 6.5). Используя теорему синусов

$$\frac{|\vec{R}_A|}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{|\vec{R}_B|}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{|\vec{P}|}{\sin(\alpha + \beta)},$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{r}; & \cos \alpha &= \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}; \\ \sin \beta &= \frac{b}{r}; & \cos \beta &= \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r}; \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{a\sqrt{r^2 - b^2} + b\sqrt{r^2 - a^2}}{r^2},$$

окончательно получаем

$$|\vec{R}_A| = |\vec{P}| \frac{r\sqrt{r^2 - b^2}}{a\sqrt{r^2 - b^2} + b\sqrt{r^2 - a^2}}; \quad |\vec{R}_B| = |\vec{P}| \frac{r\sqrt{r^2 - a^2}}{a\sqrt{r^2 - b^2} + b\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

В некоторых случаях не очевидно, что действующая на тело система сил является сходящейся. Установить этот факт и определить линию действия реакции шарнира помогает доказанная в п.1.1 теорема о трёх силах.

Пример 6.3. Однородная балка AB весом P закреплена в точке A при помощи цилиндрического шарнира и поддерживается в горизонтальном положении при помощи троса BC , образующего угол α с горизонтом (рис. 6.6). Определить реакцию шарнира и натяжение троса.

Рассмотрим равновесие балки. Балка AB находится в равновесии под действием трёх сил — заданной силы \vec{P} , реакции троса \vec{T} , направленной вдоль BC , и реакции шарнира \vec{R}_A , линия действия которой в соответствии с теоремой о трёх силах должна проходить через точку O , в которой пересекаются линии действия двух других сил (рис. 6.7).

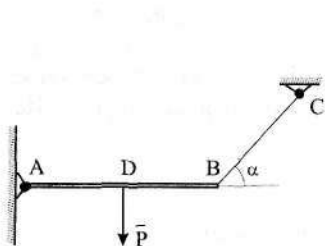


Рис. 6.6

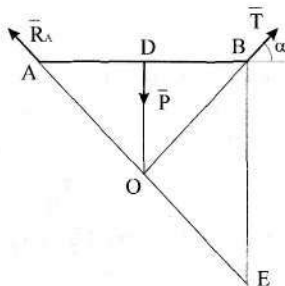


Рис. 6.7

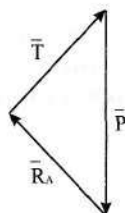


Рис. 6.8

Заметим, что направление силы \vec{R}_A можно определить только после построения силового многоугольника (рис. 6.8). Для определения модулей искомых сил, т.е. для решения силового треугольника, воспользуемся

подобием силового и геометрического треугольника BOE :

$$\frac{|\vec{P}|}{BE} = \frac{|\vec{T}|}{BO} = \frac{|\vec{R}_A|}{OE}.$$

Вычисляя длины отрезков

$$OB = \frac{DB}{\cos \alpha}; \quad OD = DB \operatorname{tg} \alpha; \quad BE = 2OD = 2DB \operatorname{tg} \alpha;$$

$$OE = AO = \sqrt{AD^2 + OD^2} = DB \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{DB}{\cos \alpha},$$

находим:

$$|\vec{T}| = |\vec{P}| \frac{BO}{BE} = \frac{|\vec{P}|}{2 \sin \alpha}; \quad |\vec{R}_A| = |\vec{P}| \frac{OE}{BE} = \frac{|\vec{P}|}{2 \sin \alpha}.$$

6.2 Равновесие системы сил, линии действия которых лежат в одной плоскости

Пусть линии действия всех сил системы $\{\vec{F}_k\}$ расположены в одной плоскости, которую примем за координатную плоскость xy . Выбирая в плоскости xy любой центр приведения O , получаем $M_{ox}^* = M_{oy}^* = 0$; $R_z^* = 0$. Следовательно, второй статический инвариант плоской системы сил тождественно равен нулю:

$$J_2 = R_x^* M_{ox}^* + R_y^* M_{oy}^* + R_z^* M_{oz}^* \equiv 0.$$

Таким образом, плоская система сил не может приводиться к динамическому винту; она может иметь равнодействующую, приводиться к паре сил или быть уравновешенной.

Моменты различных сил такой системы относительно любой точки плоскости отличаются друг от друга только величиной и знаком проекции на координатную ось z . Поэтому при изучении плоской системы сил во многих учебниках вводят обозначение $M_o(\vec{F})$, понимая под ним проекцию на ось Oz момента силы относительно точки O . В настоящей работе такое обозначение не используется.

В условиях равновесия произвольной системы сил (2.3) в рассматриваемом случае остаются только три значащих уравнения:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^n M_{oz}(\vec{F}_k) = 0, \quad (6.2)$$

где O — произвольно выбранная точка плоскости xy . При этом для вычисления $M_{oz}(\vec{F})$ применимо простое правило:

$$M_{oz}(\vec{F}) = \pm |\vec{F}| h,$$

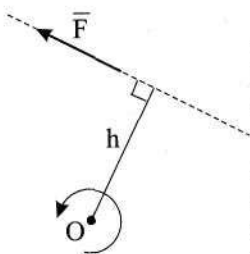


Рис. 6.9

где h — плечо силы, равное кратчайшему расстоянию от точки O до линии действия силы; знак "+" соответствует повороту вокруг точки O против хода часовой стрелки (рис. 6.9).

Для получения наиболее простых уравнений равновесия имеет смысл одну из координатных осей проводить перпендикулярно возможно большему числу неизвестных сил, а за моментную принимать точку, через которую проходят линии действия возможно большего числа неизвестных сил.

Пример 6.4. Ломаный стержень ACB имеет шарнирно неподвижную опору в точке A и шарнирно подвижную опору в точке B . В точке D приложена сила \vec{Q} , линия действия которой перпендикулярна BC (рис. 6.10). Дано: $Q = 2kH$, $AC = 4$ м, $DC = BD = 2$ м. $\alpha = \pi/3$. Определить реакции опор.

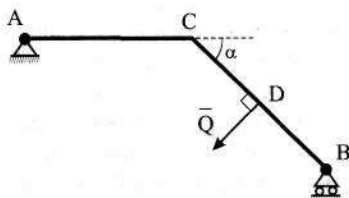


Рис. 6.10

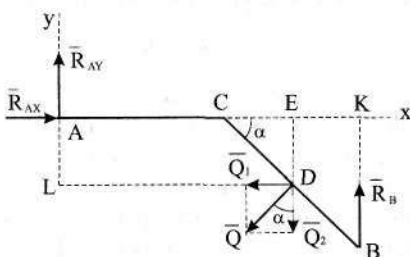


Рис. 6.11

Рассмотрим равновесие стержня ACB . Направление реакции шарнира A заранее неизвестно. Можно определить линию действия этой силы

при помощи теоремы о трёх силах и решить задачу графически. Однако на таком пути часто возникают хотя и преодолимые, но неоправданные сложности, связанные с решением чисто геометрических проблем. Намного эффективнее аналитический путь решения задачи.

Неизвестную по модулю и направлению силу \vec{R}_A представим двумя неизвестными по модулю составляющими, направленными вдоль выбранных координатных осей. Направление реакции в точке B известно. Заданную силу \vec{Q} имеет смысл разложить в точке D на две составляющие, параллельные координатным осям. Силовая схема представлена на рис. 6.11.

Условия равновесия в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & R_{Ax} - Q \sin \alpha &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & R_{Ay} - Q \cos \alpha - R_B &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) &= 0; & R_B AK - Q \sin \alpha AL - Q \cos \alpha AE &= 0.\end{aligned}$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$\begin{aligned}R_B &= Q \sin \alpha \frac{AL}{AK} + Q \cos \alpha \frac{AE}{AK} = Q \sin \alpha \frac{CD \sin \alpha}{AC + BC \cos \alpha} + \\ &+ Q \cos \alpha \frac{AC + CD \cos \alpha}{AC + BC \cos \alpha} = Q \frac{AC \cos \alpha + CD}{AC + BC \cos \alpha} = \frac{4}{3} \text{ кН}; \\ R_{Ax} &= Q \sin \alpha = \sqrt{3} \text{ кН}; & R_{Ay} &= Q \cos \alpha - R_B = -\frac{1}{3} \text{ кН}.\end{aligned}$$

Замечание. Имеет смысл получать решение в общем виде (в буквенных обозначениях). Численные значения следует подставлять только на последнем этапе решения задачи.

Рассмотрим особенности решения задач, в которых наряду с силами на тело действует пара сил (\vec{F}_1, \vec{F}_2) с моментом \vec{M} , расположенная в координатной плоскости xy .

При составлении уравнений равновесия следует учитывать, что в условия равенства нулю суммы проекций всех сил на любую координатную ось входящие в пару силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 никакого вклада не внесут, так как сумма проекций этих сил на любую координатную ось равна нулю ($F_1^i = -F_2^i$).

Вычислим сумму моментов сил, образующих пару, относительно оси z (рис. 6.12).

$$\begin{aligned} M_{oz}(\vec{F}_1) + M_{oz}(\vec{F}_2) &= |\vec{F}_1| \sin \alpha \cdot OA - |\vec{F}_2| \sin \alpha \cdot OB = \\ &= |\vec{F}_1| \sin \alpha \cdot (OA - OB) = \pm |\vec{F}_1| \sin \alpha \cdot AB = \pm |\vec{F}_1| \cdot h = M_z = \pm |\vec{M}| \end{aligned}$$

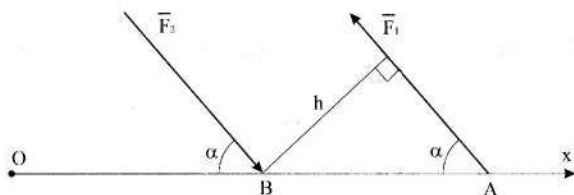


Рис. 6.12

Таким образом, в уравнении моментов к моментам прочих сил алгебраически прибавляется момент пары, точнее, проекция на ось z вектора момента пары, взятая с соответствующим знаком. Проекция момента пары положительна, если с положительного конца оси z поворот пары виден против хода часовой стрелки.

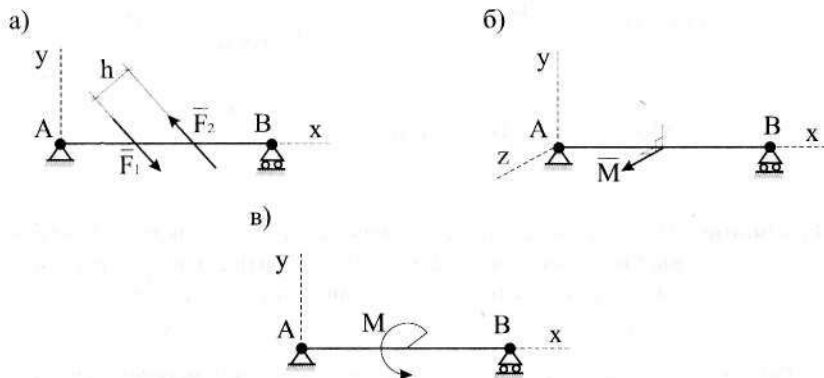


Рис. 6.13

Наличие пары сил можно отразить на чертеже различными способами (рис. 6.13), из которых наиболее удобным представляется изображённый на рис. 6.13в.

Пример 6.5. Однородная балка AB весом P , шарнирно закреплённая в точке A , удерживается в горизонтальном положении при помощи троса. Балка нагружена парой сил с моментом M (рис. 6.14). Дано: $P = 200 \text{ Н}$; $M = 150 \text{ Нм}$; $AB = 4 \text{ м}$; $\alpha = \pi/6$. Определить давление на шарнир A и натяжение троса.

Рассмотрим равновесие балки AB . Силовая схема представлена на рис. 6.15. Заметим, что необходимо определить силы, приложенные не к балке AB , а к другим телам — шарниру и тросу. Мы рассматриваем равновесие балки и поэтому вводим силы реакции шарнира \vec{R}_A и реакции троса T . Но эти реакции, согласно третьему закону Ньютона, равны по модулю и противоположны по направлению искомым силам.

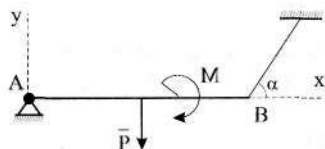


Рис. 6.14

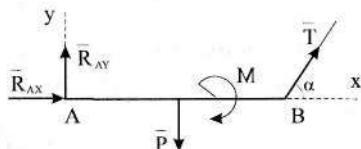


Рис. 6.15

При составлении уравнения моментов за моментную примем точку A и заметим, что поворот, создаваемый парой сил, виден по ходу часовой стрелки.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & R_{Ax} + T \cos \alpha &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & R_{Ay} - P + T \sin \alpha &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) &= 0; & T \sin \alpha \cdot AB - P \frac{AB}{2} - M &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$T = \frac{2M + P \cdot AB}{2AB \sin \alpha} = 225 \text{ Н};$$

$$R_{AX} = -T \cos \alpha = -225 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Н}; \quad R_{AY} = P - T \sin \alpha = 87.5 \text{ Н}.$$

Давление на шарнир $\vec{N}_A = -\vec{R}_A$ определяем по формуле:

$$|\vec{N}_A| = |\vec{R}_A| = \sqrt{R_{AX}^2 + R_{AY}^2} = 2.5\sqrt{292} \text{ Н}.$$

6.3 Равновесие произвольной системы сил

Для равновесия произвольной системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трёх взаимно перпендикулярных осей координат равнялась нулю и сумма моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей равнялась нулю:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) &= 0; & \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) &= 0; & \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

Напомним, что моментом силы относительно оси называется проекция на ось момента силы, вычисленного относительно любой точки этой оси:

$$M_z(\vec{F}) = |\vec{M}_O(\vec{F})| \cos(\widehat{\vec{M}_O, \vec{k}}).$$

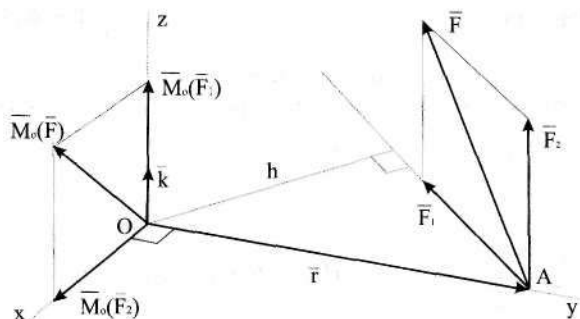


Рис. 6.16

Получим удобный для практических целей способ вычисления момента силы относительно оси. Рассмотрим силу \vec{F} , произвольным образом расположенную по отношению к оси z . Проведём через точку приложения

силы плоскость, перпендикулярную оси (рис.6.16). Пусть O – точка пересечения этой плоскости с осью. Разложим силу \vec{F} на две составляющие, одна из которых \vec{F}_1 перпендикулярна оси, а вторая \vec{F}_2 параллельна оси:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Умножая слева векторно на вектор \vec{OA} , получаем:

$$\vec{OA} \times \vec{F} = \vec{OA} \times \vec{F}_1 + \vec{OA} \times \vec{F}_2$$

или

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2).$$

Записывая последнее равенство в проекции на ось z , получаем:

$$M_z(\vec{F}) = \pm |\vec{M}_O(\vec{F}_1)| = \pm |\vec{F}_1| h,$$

так как вектор $\vec{M}_O(\vec{F}_2)$ перпендикулярен оси и не даёт на неё проекции. Таким образом,

модуль момента силы относительно оси равен произведению модуля проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, на кратчайшее расстояние от оси до этой проекции. Момент силы относительно оси больше нуля, если с положительного конца оси поворот тела вокруг оси под действием силы виден против хода часовой стрелки и отрицателен в противоположном случае.

Заметим, что момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы параллельна оси или пересекает ось. Другими словами, момент силы относительно оси равен нулю, если ось и линия действия силы лежат в одной плоскости (компланарны).

Пример 6.6. На горизонтальном валу AD жёстко закреплены два шкива, плоскости которых перпендикулярны валу. В точках A и D установлены цилиндрические шарниры. Намотанные на шкивы тросы переброшены через блоки O_1 и O_2 и растягиваются грузами E и G (рис.6.17). Определить вес Q груза G , при котором можно удерживать в равновесии груз E весом P . Определить также реакции шарниров. Трением пренебречь.

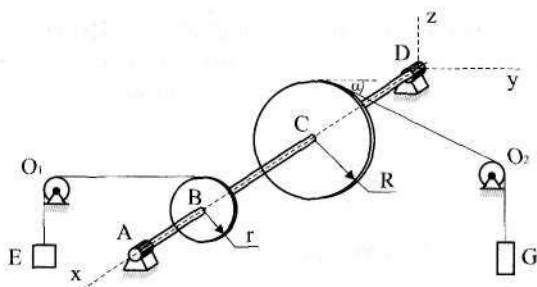


Рис. 6.17

Рассмотрим равновесие вала AD . Силовая расчётная схема изображена на рис. 6.18. Заметим, что поскольку трение на блоках не учитывается, силы реакции тросов равны весу соответствующих грузов: $T_1 = P$; $T_2 = Q$.

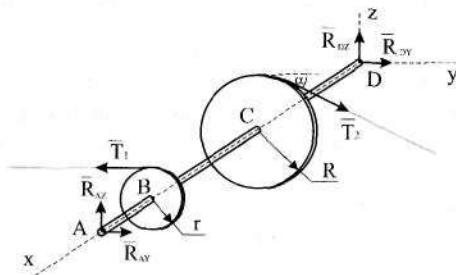


Рис. 6.18

Первые три из уравнений равновесия принимают вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0; & 0 &\equiv 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0; & R_{Ay} + R_{Dy} - T_1 + T_2 \cos \alpha &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0; & R_{Az} + R_{Dz} - T_2 \sin \alpha &= 0. \end{aligned}$$

При составлении уравнений моментов удобно использовать вспомогательные чертежи. Например, составляя уравнение моментов относительно оси x , изображаем вид с положительного конца оси x на координатную плоскость yz (рис. 6.19). В этом случае уравнение моментов относительно

оси x составляем так же, как для системы сил, расположенных в одной плоскости:

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad T_1 r - T_2 R = 0.$$

Составим уравнение моментов относительно оси y (рис.6.20а). Заметим, что на таком чертеже сила \vec{T}_1 не видна, а сила \vec{T}_2 видна частично — только её составляющая по оси z ($T_2'' = T_2 \sin \alpha$):

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0;$$

$$T_2 \sin \alpha \cdot CD - R_{Az} \cdot AD = 0.$$

Уравнение моментов относительно оси z имеет вид (рис.6.20б):

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0;$$

$$R_{Ay} \cdot AD - T_1 \cdot BD + T_2 \cos \alpha \cdot CD = 0.$$

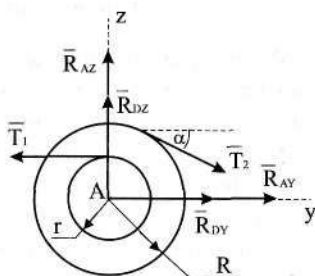


Рис. 6.19

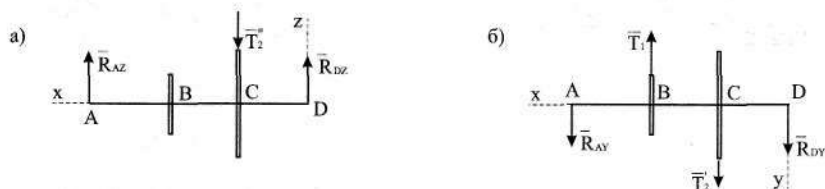


Рис. 6.20

Полученная система уравнений позволяет определить все искомые силы по заданным размерам конструкции.

Заметим, что составлять вспомогательные чертежи не обязательно, но удобно, особенно при отсутствии соответствующих навыков. Другой приём, полезный при вычислении момента силы относительно оси, состоит в том, что сила раскладывается на составляющие, моменты которых достаточно просто вычисляются.

Пример 6.7. Однородная прямоугольная пластина весом P удерживается в горизонтальном положении при помощи шарового шарнира A , цилиндрического шарнира B и троса CE (рис.6.21). На пластину действуют сила \vec{Q} и пара сил с моментом \vec{M} . Даны размеры пластины и угол α . Определить реакции опор.

Рассмотрим равновесие пластины. Силовая расчётная схема представлена на рис. 6.22. Сила реакции троса \vec{T} разложена на две составляющие: \vec{T}_1 ($T_1 = T \cos \alpha$), линия действия которой проходит через начало координат, и \vec{T}_2 ($T_2 = T \sin \alpha$), линия действия которой параллельна оси z . Линия действия силы \vec{T}_1 пересекает все три координатные оси и, следовательно, не создаёт момента относительно любой из осей координат. Пара сил в данном случае создаёт вращающий момент относительно оси y , параллельно которой располагается вектор \vec{M} .

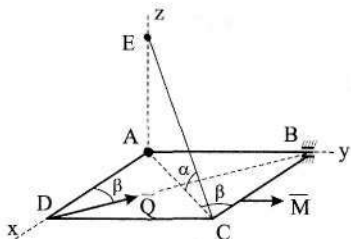


Рис. 6.21

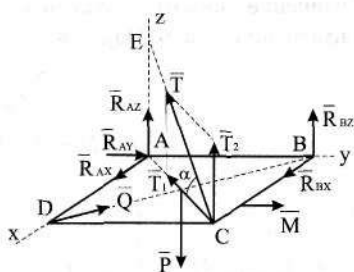


Рис. 6.22

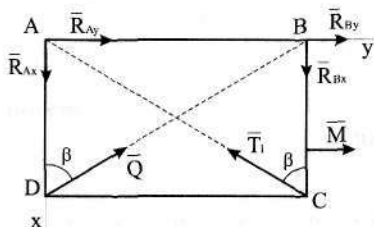


Рис. 6.23

Угол β (точные значения тригонометрических функций этого угла) легко вычислить через заданные длины сторон пластины (рис. 6.23):

$$\sin \beta = \frac{AB}{BD} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + AD^2}};$$

$$\cos \beta = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}}.$$

Условия равновесия имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} + R_{Bx} - Q \cos \beta - T_1 \cos \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{AY} + Q \sin \beta - T_1 \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0; \quad R_{AZ} + R_{BZ} - P + T_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad R_{BZ} \cdot AB + T_2 \cdot AB - P \cdot \frac{AB}{2} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad P \cdot \frac{AD}{2} - T_2 \cdot AD + M = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0; \quad Q \cdot AD \sin \beta - R_{BX} \cdot AB = 0.$$

Полученная система уравнений позволяет определить все неизвестные величины.

Глава 7

Статический расчёт конструкций

7.1 Равновесие составных тел

При решении задач об определении опорных реакций может оказаться, что из составленных условий равновесия невозможно определить все неизвестные величины, так как их число больше числа уравнений, в которые эти неизвестные входят. Подобное может произойти по двум основным причинам.

Во-первых, на рассматриваемое тело могут быть наложены лишние связи, ненужные для обеспечения равновесия абсолютно твёрдого тела, но необходимые для предотвращения недопустимо больших деформаций. В этом случае задача определения реакций опор является статически неопределимой в том смысле, что невозможно определить реакции связей без учёта деформаций тела, т.е. оставаясь в рамках модели абсолютно твёрдого тела. Такие задачи в теоретической механике не рассматриваются.

Во-вторых, в качестве тела, равновесие которого рассматривается, может быть выбрана конструкция, состоящая из двух или более тел, соединённых между собой внутренними связями. На такую конструкцию заведомо приходится накладывать дополнительные связи, обеспечивающие равновесие конструкции. Основная особенность решения таких задач состоит в том, что необходимо рассматривать равновесие нескольких тел данной конструкции.

Рассмотрим, например, трёхшарнирную арку ABC , нагруженную активными силами \vec{P} и \vec{Q} (рис. 7.1). Можно рассмотреть равновесие арки в целом. Тогда в систему внешних сил войдут заданные силы \vec{P} и \vec{Q} и си-

лы реакций внешних опор — шарниров A и B . Соответствующая силовая схема представлена на рис. 7.2.

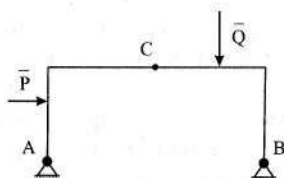


Рис. 7.1

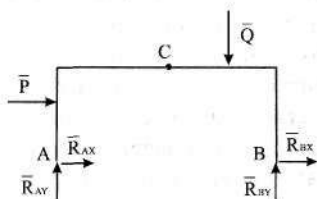


Рис. 7.2

Хотя такая арка не является абсолютно твёрдым телом, заранее известно, что она покоится и, следовательно, приложенные к ней силы удовлетворяют условиям равновесия. Наличие шарнира C позволяет двум частям арки поворачиваться друг относительно друга. Для предотвращения такого поворота приходится усилить одну из опор, например, ставить в точке B шарнирно неподвижную опору вместо шарнирно подвижной. При этом число неизвестных составляющих сил реакций увеличивается — появляется \vec{R}_{Bx} . Трёх уравнений равновесия недостаточно для определения четырёх неизвестных. Поэтому приходится рассматривать равновесие ещё какой-либо части конструкции, например, стержня AC .

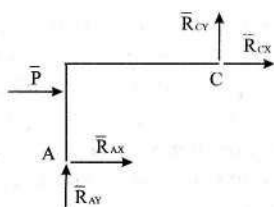


Рис. 7.3

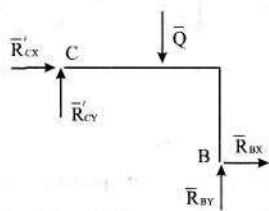


Рис. 7.4

Для стержня AC шарнир C является внешней опорой, поэтому его реакция входит в систему внешних сил, действующих на AC (Рис. 7.3). Для стержня AC можно составить ещё три уравнения равновесия, которые вместе с уравнениями равновесия, составленными для арки ACB , образуют систему шести уравнений, содержащих шесть неизвестных.

Можно рассмотреть равновесие правого стержня BC (рис. 7.4). При этом следует учитывать, что силы взаимодействия в шарнире C подчиняются третьему закону Ньютона: $\vec{R}_{Cx} = -\vec{R}'_{Cx}$; $\vec{R}_{Cy} = -\vec{R}'_{Cy}$. Для

решения поставленной задачи достаточно рассмотреть равновесие только двух из трёх тел в любой комбинации. Условия равновесия третьего тела могут быть использованы для проверки полученных результатов.

Универсальный метод решения подобных задач состоит в том, что конструкция разбивается на отдельные абсолютно твёрдые тела и рассматривается равновесие каждого из этих тел. Однако во многих случаях такой подход оказывается нерациональным, поскольку приводит к необходимости решения системы уравнений, каждое из которых может содержать несколько неизвестных. Причём в уравнения может входить значительное число лишних неизвестных, которые не требуется определять по условиям решаемой задачи. Приобретя определённые навыки, можно поставить целью поиск наиболее рационального способа решения задачи, в основе которого лежит идея использования минимального числа уравнений, каждое из которых, по-возможности, содержит только одну неизвестную.

Пример 7.1. Стержневая конструкция, изображённая на рис.7.5, нагружена силами \vec{P} и \vec{Q} и парой сил с моментом M . Дано: $AD = BD = BE = EC = a = 2 \text{ м}$. $P = 2 \text{ кН}$; $Q = 5 \text{ кН}$; $M = \sqrt{3} \text{ кНм}$; $\alpha = \pi/6$. Определить усилия в шарнирах A, B, C .

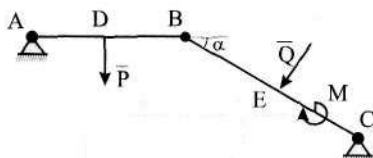


Рис. 7.5

Нужно определить шесть составляющих реакций шарниров. Для получения необходимых для этого шести уравнений можно рассмотреть равновесие всей конструкции и одного из стержней или равновесие каждого из стержней.

С точки зрения удобства вычисления плеч сил предпочтительнее рассмотреть равновесие каждого из стержней.

Рассмотрим равновесие стержня AB . Силовая схема представлена на рис. 7.6. Можно составить "стандартную" систему уравнений равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} + R_{Bx} = 0; \quad (a)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} - P + R_{By} = 0; \quad (b)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0; \quad R_{By} \cdot AB - P \cdot AD = 0. \quad (c)$$

Нетрудно видеть, что только последнее уравнение (с) системы позволяет сразу определить неизвестную

$$R_{BY} = P \frac{AD}{AB} = \frac{P}{2} = 1 \text{ кН.}$$

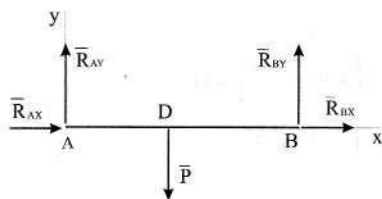


Рис. 7.6

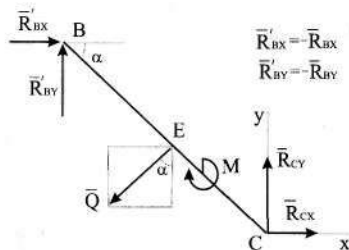


Рис. 7.7

Однако, если составить уравнение

$$\sum_{k=1}^n M_{Bz}(\vec{F}_k) = 0; \quad P \cdot BD - R_{Ay} \cdot AB = 0, \quad (d)$$

то сразу определяется вторая неизвестная

$$R_{Ay} = P \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{P}{2} = 1 \text{ кН.}$$

Надобность в уравнении (b) пропадает, уравнение (a) используем в дальнейшем для определения R_{Ax} .

Рассмотрим равновесие стержня BC. (При составлении уравнений равновесия учитывается, что $R_{Bx} = -R'_{Bx}$; $R_{By} = -R'_{By}$.) Силовая схема представлена на рис. 7.7. Прежде всего определим R_{Bx} . Для этого составим уравнение

$$\sum_{k=1}^n M_{Cz}(\vec{F}_k) = 0; \quad R_{Bx} \cdot BC \sin \alpha + R_{By} \cdot BC \cos \alpha - M + Q \cdot CE = 0. \quad (d)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R_{Bx} &= -Q \frac{CE}{BC \sin \alpha} - R_{By} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{M}{BC \sin \alpha} = \\ &= -Q - \frac{P}{2} \sqrt{3} + \frac{M}{2} = -\left(5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ кН.} \end{aligned}$$

Теперь можно использовать уравнение (a): $R_{Ax} = -R_{Bx} = (5 + \sqrt{3}/2) \text{ кН.}$ Для определения оставшихся неизвестных используем уравнения

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{CX} - R_{BX} - Q \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{CY} - R_{BY} - Q \cos \alpha = 0;$$

Отсюда

$$R_{CX} = R_{BX} + Q \sin \alpha = - \left(2.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ кН};$$

$$R_{CY} = R_{BY} + Q \cos \alpha = (1 + 2.5\sqrt{3}) \text{ кН}.$$

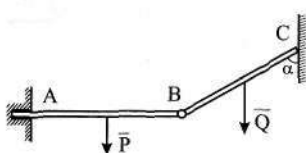


Рис. 7.8

Пример 7.2. Однородные балки AB весом P и BC весом Q соединены между собой шарниром B (рис. 7.8). Балка AB горизонтальна, её левый конец заделан в стену. Балка BC опирается на гладкую вертикальную стену, с которой образует угол $\alpha = \pi/6$. Дано: $AB = 4$ м; $BC = 6$ м; $P = 200$ Н; $Q = 300$ Н. Определить реакции опорных стен.

Поскольку по условию задачи не требуется определять усилия во внутреннем шарнире B , имеет смысл рассмотреть равновесие всей конструкции (рис. 7.9). Составим уравнения равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{AX} - R_C = 0; \quad (a)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{AY} - P - Q = 0; \quad (b)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A - P \cdot \frac{AB}{2} - Q(AB + \frac{BC}{2} \sin \alpha) + R_C \cdot BC \cos \alpha = 0. \quad (c)$$

Только уравнение (b) позволяет сразу определить

$$R_{AY} = P + Q = 500 \text{ Н}.$$

Для вычисления других неизвестных необходимо определить R_C . Рассмотрим равновесие BC (рис. 7.10).

Составим уравнение

$$\sum_{k=1}^n M_{Bz}(\vec{F}_k) = 0; \quad R_C \cdot BC \cos \alpha - Q \cdot \frac{BC}{2} \sin \alpha = 0.$$

Отсюда

$$R_C = \frac{Q}{2} \operatorname{tg} \alpha = 50\sqrt{3} \text{ Н.}$$

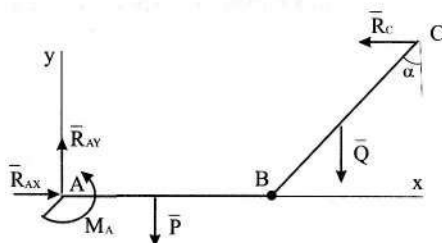


Рис. 7.9

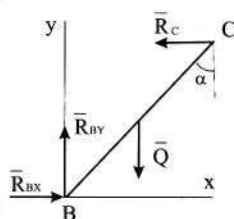


Рис. 7.10

Из уравнений (a) и (b) находим:

$$R_{Ax} = R_C = 50\sqrt{3} \text{ Н;}$$

$$M_A = P \cdot \frac{AB}{2} + Q \left(AB + \frac{BC}{2} \sin \alpha \right) - R_C \cdot BC \cos \alpha = 1600 \text{ Нм.}$$

Пример 7.3. Однородный стержень

AB весом P может вращаться вокруг шарнира A. Он опирается на такой же стержень CD, который может вращаться вокруг оси Ez, проходящей через его середину (рис. 7.11). Точки A и E лежат на одной вертикали. $AB = CD = 2a$; $AE = CE = DE = a$. В точке D подвешен груз $Q = 2P$.

Определить угол φ , образуемый стержнем AB с вертикалью в положении равновесия. Трением пренебречь.

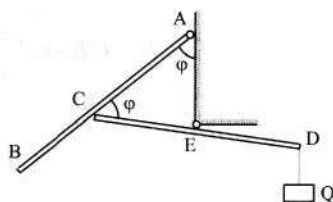


Рис. 7.11

Особенностью задачи является то обстоятельство, что требуется определить только одну неизвестную φ . Другими возможными неизвестными

являются четыре составляющие реакций шарниров A и E , а также сила взаимной реакции стержней в точке C . Для решения задачи принимаем следующую схему.

Рассмотрим равновесие стержня AB (рис. 7.12). Составим уравнение моментов относительно оси Az :

$$P \cdot a \sin \varphi - R_C \cdot AC = 0.$$

Величину AC найдём как основание равнобедренного треугольника AEC :

$$AC = 2AE \cos \varphi = 2a \cos \varphi.$$

Таким образом,

$$P \sin \varphi - 2R_C \cos \varphi = 0. \quad (a)$$

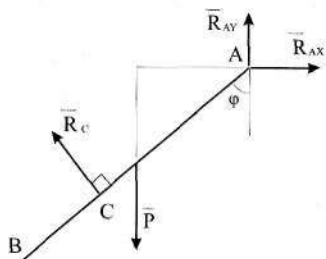


Рис. 7.12

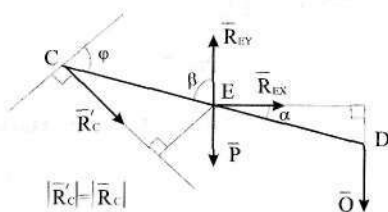


Рис. 7.13

Рассмотрим равновесие стержня CD (Рис. 7.13). Составим уравнение моментов относительно оси Ez :

$$R_C \cdot CE \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) - Q \cdot DE \cos \alpha = 0$$

или

$$R_C \cos \varphi - Q \sin 2\varphi = 0, \quad (b)$$

так как

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - (\pi - 2\varphi) = 2\varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Исключая из уравнений (a) и (b) R_C , получаем

$$P \sin \varphi - 2Q \sin 2\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \sin \varphi (1 - 8 \cos \varphi) = 0.$$

Интерес представляет решение $\varphi = \arccos(1/8)$.

Пример 7.4. Стержень AC жёстко закреплён в точке A и соединён шарниром C со стержнем BC . В точке B установлен подвижный шарнир. На стержень AC действует линейно распределённая нагрузка максимальной интенсивности q_1 и сила \vec{P} . На стержень BC действует однородная распределённая нагрузка интенсивности q_2 и пара сил с моментом M . Размеры указаны на чертеже (рис. 7.14). Определить реакции опор.

Рассмотрим равновесие всей конструкции. Внешними опорами для ACB будут жёсткая заделка в точке A и шарнир B . Распределённую нагрузку заменяем равнодействующими \vec{Q}_1 и \vec{Q}_2 . Силовая схема представлена на рис. 7.15. Условия равновесия имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} + P - Q_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} + R_B - Q_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A + M - P \cdot \frac{a}{2} - Q_1 \frac{a}{3} + Q_2 \frac{a}{2} + R_B \cdot 2a = 0,$$

причём, $Q_1 = 0.5 q_1 a$ и $Q_2 = q_2 a$.

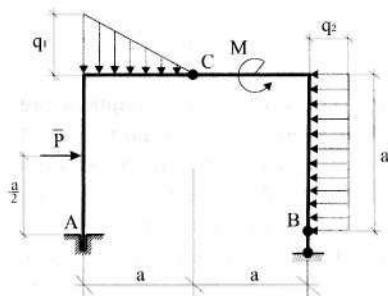


Рис. 7.14

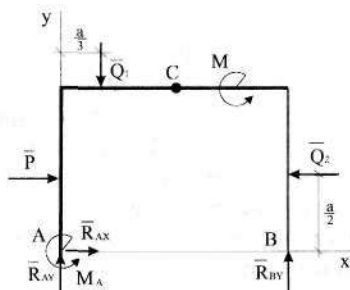


Рис. 7.15

Полученные три уравнения содержат четыре неизвестные. Это объясняется тем, что условия, являющиеся достаточными для равновесия абсолютно твёрдого тела, использованы для тела деформируемого, для которого они являются только необходимыми. Для получения достаточного количества уравнений рассмотрим равновесие одной из частей конструкции, например, левого стержня AC . Для этого стержня внешними силами, помимо прочего, будет и реакция шарнира C (рис. 7.16).

Условия равновесия имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{AX} + R_{CX} + P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{AY} + R_{CY} - Q_1 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A - P \cdot \frac{a}{2} - Q_1 \frac{a}{3} + R_{CY} a - R_{CX} a = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, находим все неизвестные.

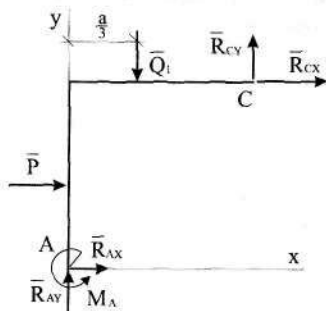


Рис. 7.16

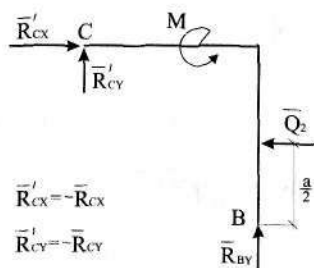


Рис. 7.17

Подобная схема решения применима для любых задач о равновесии сочлѐнных тел. Нетрудно, однако, заметить, что решение полученной системы уравнений связано с определёнными трудностями, поскольку в большинстве уравнений содержится более одной неизвестной. Приобретя определённые навыки в составлении уравнений равновесия, можно поставить задачу составления в каждом конкретном случае наиболее просто решаемой системы уравнений.

Обратимся к разобранному примеру. Можно предложить следующую схему решения задачи.

Тело ACB:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{AX} + P - Q_2 = 0.$$

Отсюда

$$R_{AX} = Q_2 - P.$$

Тело BC (рис. 7.17). Учитывая, что $R_{CX} = -R'_{CX}$; $R_{CY} = -R'_{CY}$, получаем:

$$\sum_{k=1}^n M_{CZ}(\vec{F}_k) = 0; \quad R_{BY} \cdot a + M - Q_2 \frac{a}{2} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad -R_{CX} - Q_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad -R_{CY} + R_{BY} = 0.$$

Отсюда

$$R_{BY} = R_{CY} = \frac{Q_2 a - 2M}{2a}; \quad R_{CX} = -Q_2.$$

Тело ABC :

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0; \quad M_A + M + R_{BY} \cdot 2a + Q_2 \frac{a}{2} - P \frac{a}{2} - \frac{Q_1 a}{3} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{AY} + R_{BY} - Q_1 = 0.$$

Отсюда

$$R_{AY} = Q_1 + \frac{2M - Q_2 a}{2a}; \quad M_A = P \frac{a}{2} + Q_1 \frac{a}{3} - Q_2 \frac{3}{2} a + M.$$

Как видно, таким способом можно последовательно определить все неизвестные.

7.2 Расчёт ферм

Особое место в ряду статических задач занимает расчёт ферм. Фермой называется жёсткая конструкция из прямолинейных стержней. Если все стержни фермы и вся приложенная к ней нагрузка расположены в одной плоскости, ферма называется плоской. В дальнейшем будем рассматривать только плоские фермы. Соединения стержней называются узлами фермы. В результате полного расчёта фермы необходимо определить реакции опор и усилия во всех стержнях фермы.

При расчёте ферм приложенную внешнюю нагрузку (включая весовую нагрузку) заменяют эквивалентной системой, силы которой приложены к узлам фермы. В реальных фермах соединения стержней, как

правило, жёсткие (сварка, клёпка и т.д.), так что они не допускают относительного поворота стержней. В расчётной схеме крепления стержней считаются шарнирными, причём, трение в шарнирах считается пренебрежимо малым.

В результате сделанных упрощающих предположений оказывается, что каждый стержень находится в равновесии под действием двух сил, приложенных к его концам. Эти силы должны иметь общую линию действия, т.е. они направлены вдоль стержня. Таким образом, считается, что каждый стержень фермы работает или на растяжение, или на сжатие, но не может испытывать кручения или изгиба. Усилие в стержне считается положительным, если он растянут. Методы расчёта фермы рассмотрим на примере.

Пример 7.5. Рассчитать ферму, изображённую на рис. 7.18. Дано: $F_1 = P\sqrt{2}$; $F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = P$; $P = 1 \text{ кН}$; $a = 4 \text{ м}$.

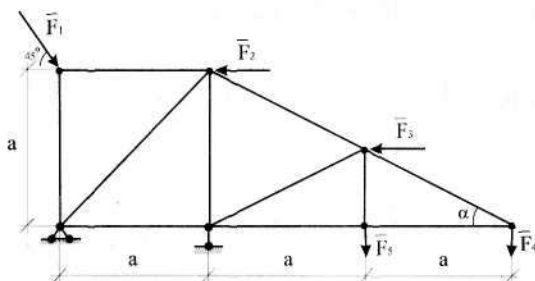


Рис. 7.18

Прежде всего обозначим все узлы и все стержни фермы.

Определим реакции опор. Для этого рассмотрим равновесие фермы в целом (рис. 7.19). Составим условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad R_{Ax} + F_1 \cos \frac{\pi}{4} - F_2 - F_3 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Bz}(\vec{F}_k^e) = 0; \quad -R_{Ay} \cdot AB + F_2 \cdot BK + F_3 \cdot LC - \\ - F_4 \cdot BD - F_5 \cdot BC = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k^e) = 0; \quad R_{Bx} \cdot AB - F_1 \cos \frac{\pi}{4} \cdot AE + F_2 \cdot AE +$$

$$+F_3 \cdot LC - F_4 \cdot AD - F_5 \cdot AC = 0.$$

Отсюда

$$R_{AX} = F_2 + F_3 - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = P; \quad R_{AY} = F_2 + \frac{1}{2} F_3 - 2F_4 - F_5 = -\frac{3}{2} P;$$

$$R_B = F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - F_2 - \frac{1}{2} F_3 + 3F_4 + 2F_5 = \frac{9}{2} P.$$

Поскольку вычисленные величины опорных реакций определяют весь дальнейший расчёт, имеет смысл проверить полученные результаты, составив, например, уравнение моментов относительно оси Lz (чтобы в это уравнение вошли все вычисленные величины):

$$\begin{aligned} F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2a - F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} + F_2 \cdot \frac{a}{2} - F_4 \cdot a - R_{AY} \cdot 2a + R_{AX} \cdot \frac{a}{2} - R_B \cdot a = \\ = \frac{Pa}{2} (4 - 1 + 1 - 2 - 9 + 6 + 1) \equiv 0. \end{aligned}$$

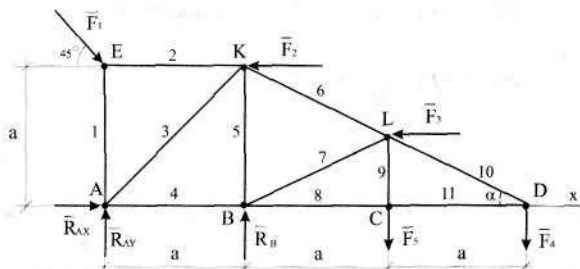


Рис. 7.19

Для определения усилий в стержнях фермы используются два основных метода.

Метод вырезания узлов. Метод состоит в том, что рассматривается равновесие каждого узла фермы в определённой последовательности. На узел действует плоская система сходящихся сил, для которой можно составить два уравнения равновесия, что позволяет определить две неизвестные. Поэтому расчёт начинают с узла, соединяющего два стержня фермы. Затем переходят к соседним узлам в определённой последовательности, которая позволяет на каждом шаге определять усилия в очередных двух стержнях. Первоначально предполагается, что стержни растянуты, т.е. их реакции направлены от узлов. Если усилие в каком-либо стержне оказывается отрицательным, то это означает, что данный стержень сжат.

Заметим, что уравнения равновесия фермы в целом являются прямым следствием полной системы уравнений равновесия узлов, так что методом вырезания узлов можно определить в том числе и реакции опор фермы. Но в этом случае часто приходится совместно решать систему, содержащую значительное число уравнений. Предварительное определение реакций опор упрощает решение задачи, а неиспользованные уравнения равновесия узлов можно рассматривать как проверочные.

Рассмотрим равновесие узла E

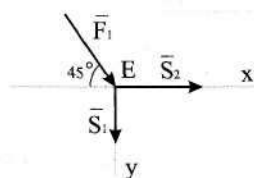
$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad S_2 + F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_1 + F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

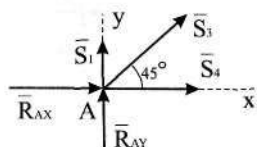
Отсюда

$$S_1 = -F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -P \quad \text{стержень сжат}$$

$$S_2 = -F_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -P \quad \text{стержень сжат}$$



Узел E



Узел A

Рассмотрим равновесие узла A

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_4 + R_{Ax} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_1 + S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + R_{Ay} = 0.$$

Отсюда

$$S_3 = (-S_1 - R_{Ay}) \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} P \quad \text{стержень растянут}$$

$$S_4 = -S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - R_{Ax} = -\frac{7}{2} P \quad \text{стержень сжат}$$

Рассмотрим равновесие узла K

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad S_6 \cos \alpha - S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - S_2 - F_2 = 0$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_6 \sin \alpha + S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + S_5 = 0.$$

Значения тригонометрических функций определим из треугольника KBD :

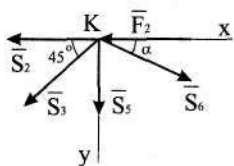
$$\sin \alpha = \frac{BK}{KD} = \frac{BK}{\sqrt{BK^2 + BD^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\cos \alpha = \frac{BD}{KD} = \frac{BD}{\sqrt{BK^2 + BD^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

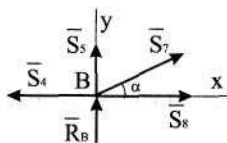
Таким образом,

$$S_6 = \frac{1}{\cos \alpha} \left(S_2 + F_2 + S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{5\sqrt{5}}{4} P \quad \text{стержень растянут}$$

$$S_5 = -S_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - S_6 \sin \alpha = -\frac{15}{4} P \quad \text{стержень сжат}$$



Узел K



Узел B

Рассмотрим равновесие узла B

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad S_7 \cos \alpha + S_8 - S_4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_5 + S_7 \sin \alpha + R_B = 0.$$

Отсюда:

$$S_7 = -\frac{R_B + S_5}{\sin \alpha} = -\frac{3\sqrt{5}}{4}P \quad \text{стержень сжат}$$

$$S_8 = S_4 - S_7 \cos \alpha = -2P \quad \text{стержень сжат}$$

Рассмотрим равновесие узла C

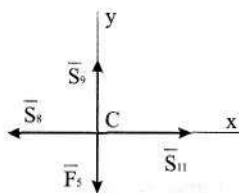
$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad S_{11} - S_8 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_9 - F_5 = 0.$$

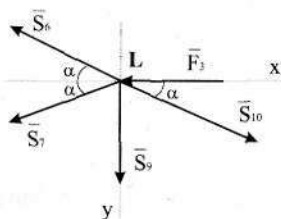
Отсюда

$$S_9 = F_5 = P \quad \text{стержень растянут}$$

$$S_{11} = S_8 = -2P \quad \text{стержень сжат}$$



Узел C



Узел L

Рассмотрим равновесие узла L

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad S_{10} \cos \alpha - F_3 - S_6 \cos \alpha - S_7 \cos \alpha = 0.$$

Отсюда

$$S_{10} = S_6 + S_7 + \frac{1}{\cos \alpha} F_3 = \sqrt{5}P \quad \text{стержень растянут}$$

Таким образом, определены усилия во всех стержнях фермы. Оставшиеся уравнения используем для проверки полученных результатов:

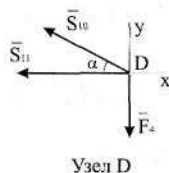
$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_9 + (S_7 + S_{10} - S_6) \sin \alpha =$$

$$= P + \left(-\frac{3\sqrt{5}}{4} + \sqrt{5} - \frac{5\sqrt{5}}{4} \right) P \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \equiv 0.$$

Рассмотрим равновесие узла D

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad -S_{11} - S_{10} \cos \alpha = 2P - 2P \equiv 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_{10} \sin \alpha - F_4 = P - P \equiv 0.$$



Метод сквозных сечений (метод Риттера). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы, в частности для проверочных расчётов. Идея метода состоит в том, что ферма разделяется сечением на две части и рассматривается равновесие одной из этих частей. Сечение проводится по трём стержням фермы, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилие. Действие отброшенной части фермы заменяют соответствующими реакциями, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т.е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Условия равновесия составляются так, чтобы в каждое уравнение входила только одна неизвестная величина.

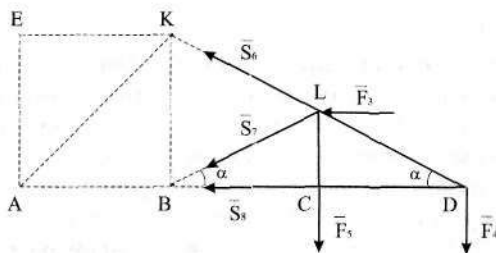


Рис. 7.20

Если сечение проводится более, чем по трём стержням, то усилия в "лишних" стержнях должны быть определены предварительно. В противном случае будет необходимо рассмотреть комбинацию из нескольких сечений или комбинацию метода сечений и метода вырезания узлов.

В качестве примера проведём сечение через шестой, седьмой и восьмой стержни (рис. 7.20). Рассмотрим равновесие правой части фермы.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n M_{Bz} (\vec{F}_k^e) = 0; \quad S_6 \cos \alpha \cdot BK + F_3 \cdot CL - F_4 \cdot BD - F_5 \cdot BC = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Dz} (\vec{F}_k^e) = 0; \quad S_7 \sin \alpha \cdot BD + F_3 \cdot LC + F_5 \cdot CD = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Lz} (\vec{F}_k^e) = 0; \quad S_8 \cdot LC + F_4 \cdot CD = 0.$$

Отсюда

$$S_6 = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(2P + P - \frac{P}{2} \right) = \frac{5\sqrt{5}}{4} P;$$

$$S_7 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \left(\frac{P}{2} + P \right) = -\frac{3\sqrt{5}}{4} P;$$

$$S_8 = -2P.$$

Условие жёсткости фермы. Найдём минимальное число стержней N , которое необходимо для образования плоской фермы, имеющей n узлов. Простейшая ячейка фермы (треугольник) имеет три стержня и три узла. Для присоединения каждого из оставшихся $n - 3$ узлов необходимо два стержня. Таким образом, условие жёсткости фермы имеет вид:

$$N = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3.$$

Условие статической определимости фермы. Ферма является статически определимой, если число неизвестных совпадает с числом независимых уравнений равновесия, в которые эти неизвестные входят. Для плоской фермы, имеющей n узлов, можно составить $2n$ уравнений равновесия, три из которых расходуются на определение трёх составляющих реакций опор. Для определения усилий в стержнях фермы остаётся $2n - 3$ уравнения. Таким образом, условие статической определимости фермы совпадает с условием её жёсткости.

Глава 8

Трение

8.1 Реакция негладкой поверхности

Пусть некоторое тело, находящееся на неподвижной поверхности, нагружено неуравновешенной системой активных сил. Со стороны опорной поверхности на тело будет действовать система сил реакций, непрерывным образом распределённая по площадке контакта. При решении ряда задач делается упрощающее предположение о том, что поверхности тел являются идеально гладкими.

При таком предположении силы действия и противодействия, возникающие при контакте, будут нормальны к площадке контакта, и система сил реакций будет иметь равнодействующую, приложенную в некоторой точке площадки контакта, которая также будет нормальна к опорной поверхности. Следует отметить, что подобная модель не в состоянии объяснить ряд существенных явлений, например, почему останавливается тело, скользящее или катящееся по инерции по горизонтальной поверхности.

Рассмотрим более сложную модель взаимодействия соприкасающихся тел. Допустим, что силы взаимодействия, возникающие в точках площадки контакта, имеют не только нормальную, но и касательную составляющие. Приведём систему сил реакций к некоторому центру, расположенному на площадке контакта. В общем случае система сил реакций окажется эквивалентной одной силе \vec{R} и одной паре сил с моментом \vec{M} ,

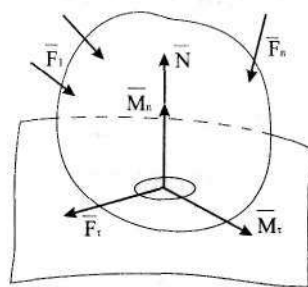


Рис. 8.1

причём угол между \vec{R} и \vec{M} может быть любым. Разложим силу \vec{R} на две составляющие, одна из которых \vec{N} направлена по нормали к поверхности, а вторая \vec{F}_τ направлена по касательной к поверхности (рис. 8.1). Составляющая \vec{F}_τ называется силой трения. Момент \vec{M} также разложим на две составляющие, одна из которых \vec{M}_τ направлена по касательной и называется моментом трения качения, а вторая \vec{M}_n нормальна к поверхности и называется моментом трения верчения.

Силы \vec{N} и \vec{F}_τ , а также моменты \vec{M}_τ и \vec{M}_n являются реакциями связи и, следовательно, определяются приложенной к телу системой активных сил. Если тело покоится на поверхности, то это означает, что система активных сил уравнивается системой сил реакций и, следовательно, при покое тела \vec{N} , \vec{F}_τ , \vec{M}_τ , \vec{M}_n должны определяться из условий равновесия системы сил, состоящей из активных сил и сил реакций. Остаётся открытым вопрос об условиях, при которых состояние покоя тела не нарушается.

Следует отметить, что физическая природа трения сложна и далеко не полностью исследована. Существуют различные модели, призванные описать это явление. Остановимся подробно на весьма распространённой модели так называемого кулонова трения.

8.2 Сила трения

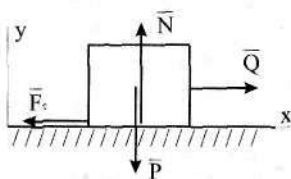


Рис. 8.2

Свойства силы трения устанавливаются по результатам следующего эксперимента. На горизонтальной поверхности находится тело, к которому приложены две активные силы: нормальная к поверхности сила \vec{P} , модуль которой в ходе эксперимента не изменяется (например, сила тяжести), и сила \vec{Q} , направленная параллельно поверхности, модуль которой в ходе эксперимента постепенно увеличивается (рис. 8.2). Со стороны поверхности возникают в ответ нормальная реакция \vec{N} и сила трения \vec{F}_τ .

Установленные в результате обработки описанного эксперимента закономерности сводятся к следующим положениям (законы Амантона-Кулона).

1. Сила трения действует в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел и противоположна тому направлению, в котором активно действующие силы стремятся сдвинуть тело.

2. Модуль силы трения при покое принимает всякий раз значение, необходимое для предотвращения проскальзывания тела по поверхности, но не может превышать некоторого предельного значения, которое достигается на грани перехода тела от состояния покоя к состоянию скольжения:

$$0 \leq F_{\tau} \leq F_{max}.$$

3. Максимальное значение силы трения при покое пропорционально нормальному давлению тела на поверхность:

$$F_{max} = f_o N,$$

где f_o — коэффициент трения при покое, который определяется экспериментально. Коэффициент f_o зависит от материала тел, шероховатости, влажности, температуры трущихся поверхностей, но на его значение в широких пределах не влияют размеры площадки контакта тел.

4. При скольжении тела по шероховатой поверхности сила трения пропорциональна силе нормальной реакции поверхности:

$$F_{\tau ck} = f N$$

и направлена в сторону, противоположную скольжению. Динамический коэффициент трения f (коэффициент трения скольжения), помимо прочего, может зависеть от относительной скорости скольжения.

При решении некоторых задач о равновесии тела на шероховатой поверхности бывает полезным использовать понятие угла и конуса трения. Углом трения φ называют угол максимального отклонения (при отсутствии скольжения) суммарной реакции \vec{R} от своей нормальной составляющей \vec{N} . Учитывая закон Кулона, получаем (рис. 8.3):

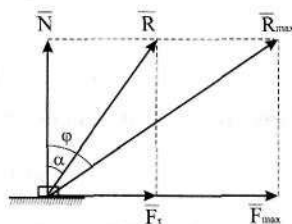


Рис. 8.3

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{max}}{N} = f_o.$$

В зависимости от действия активных сил направление суммарной реакции \vec{R} может меняться. Множество всех возможных направлений максимальной силы суммарной реакции \vec{R}_{max} образует коническую поверхность — конус трения.

Допустим, что активные силы имеют равнодействующую \vec{F} , линия действия которой составляет угол α с нормалью к поверхности. Если

тело находится в покое, то $\vec{R} = -\vec{F}$ и, следовательно:

$$F_{\tau} - F \sin \alpha = 0; \quad N - F \cos \alpha = 0, \quad \text{причём,} \quad F_{\tau} \leq F_{\max} = f_o N.$$

Определяя из условий равновесия отношение F_{τ}/N и подставляя его в неравенство, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f_o = \operatorname{tg} \varphi, \quad \text{т.е.} \quad \alpha \leq \varphi.$$

Таким образом, для равновесия тела на шероховатой поверхности необходимо (и достаточно), чтобы система приложенных к телу активных сил имела равнодействующую, линия действия которой целиком лежит внутри конуса трения.

Пример 8.1. Установить, будет ли находиться в покое тело, изображённое на рис. 8.2, если $P = 1000 \text{ Н}$; $Q = 70 \text{ Н}$; $f_o = 0.1$.

Предположим, что тело находится в покое; тогда

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad Q - F_{\tau} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N - P = 0.$$

Отсюда:

$$N = P = 1000 \text{ Н}; \quad F_{\tau} = Q = 70 \text{ Н}.$$

Вычислим максимально возможную силу трения:

$$F_{\max} = f_o N = 100 \text{ Н}.$$

В рассматриваемом случае вычисленная из условий равновесия сила трения оказалась меньше максимальной возможной, следовательно, тело находится в покое и $F_{\tau} = 70 \text{ Н}$.

Пример 8.2. Сохраняя условия предыдущего примера, полагаем $Q = 110 \text{ Н}$.

Аналогично примеру 8.1, вычисляем

$$F_{\tau} = Q = 110 \text{ Н}; \quad F_{\max} = f_o N = 100 \text{ Н}.$$

Очевидно, что покой нарушится, так как необходимая для предотвращения скольжения сила оказалась больше максимально возможной силы трения. Таким образом, тело придёт в движение, а сила трения примет максимальное значение:

$$F_{\tau} = F_{\max} = 100 \text{ Н.}$$

Пример 8.3. Однородный стержень AB опирается на гладкую стену и негладкий пол, образуя с полом угол α (рис. 8.4). Вес стержня P . В точке A привязан трос, протянутый по полу, который растягивается гирей весом Q . Коэффициент трения f_0 . Определить, при каких значениях P возможно равновесие. Трением на блоке D пренебречь.

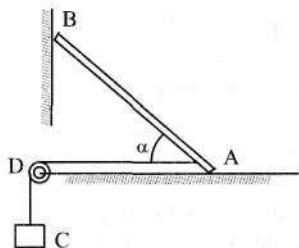


Рис. 8.4

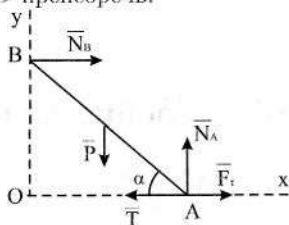


Рис. 8.5

При потере равновесия возможно скольжение точки A по полу как влево, так и вправо. Найдём сначала минимальное значение P , при котором ещё возможно равновесие. Если разгружать тело AB (уменьшать P), то при потере равновесия точка A будет скользить влево. Силловая схема представлена на рис. 8.5. Составим условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0;$$

$$N_B - T + F_{\tau} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0;$$

$$N_A - P = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k^e) = 0;$$

$$P \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha - N_B \cdot AB \sin \alpha = 0.$$

При потере равновесия

$$P = P_{\min}; \quad F_{\tau} = F_{\max} = f_0 N_A.$$

Решим полученную систему уравнений относительно P_{min} . Учитывая, что $T = Q$, находим:

$$P_{min} = \frac{2Q}{\operatorname{ctg} \alpha + 2f_o}.$$

При определении P_{max} заметим, что при потере равновесия точка A будет скользить вправо и, следовательно, направление силы трения следует изменить на противоположное, что соответствует изменению знака перед силой трения в полученном выше решении:

$$P_{max} = \frac{2Q}{\operatorname{ctg} \alpha - 2f_o}.$$

Таким образом, равновесие стержня AB возможно, если его вес заключён в пределах

$$\frac{2Q}{\operatorname{ctg} \alpha + 2f_o} \leq P \leq \frac{2Q}{\operatorname{ctg} \alpha - 2f_o}.$$

8.3 Трение качения

Говоря о свойствах трения качения, обычно подразумевают следующий опыт. Исследуется возможность равновесия диска (цилиндра) радиуса r , находящегося на плоской шероховатой поверхности и нагруженного одной активной силой, линия действия которой проходит через центр диска. При этом предполагается, что результаты такого опыта могут быть аппроксимированы на случай более сложного взаимодействия (например, если опорная поверхность имеет кривизну).

Приложенную к диску активную силу разложим на нормальную \vec{P} и касательную \vec{Q} составляющие. В ответ на давление \vec{P} возникает нормальная составляющая реакции поверхности \vec{N} . При любой, сколь угодно малой, силе \vec{Q} возникает сила трения \vec{F}_τ . Сила \vec{F}_τ до некоторых пор (пока сила \vec{Q} не превзойдёт значения предельной силы трения) будет удерживать точки контакта от проскальзывания. При этом силы \vec{Q} и \vec{F}_τ образуют пару сил, под действием которой диск начал бы катиться, если бы момент этой пары не уравновешивал бы момент трения качения (рис.8.6). По мере роста модуля силы \vec{Q} , возрастает и момент трения качения, достигая максимума при переходе тела от состояния покоя к состоянию качения.

Экспериментально установлено, что максимальное значение момента трения качения пропорционально нормальному давлению тела на поверхность:

$$M_{\tau max} = k N,$$

где k — коэффициент трения качения, определяемый экспериментально. Заметим, что если коэффициент трения скольжения — величина безразмерная, то коэффициент трения качения имеет размерность длины. В справочниках обычно указывается отношение коэффициента трения качения к радиусу диска. Во всех случаях $k/r \ll f_0$, так что при увеличении силы \vec{Q} покой нарушается и диск начинает катиться, но при этом сила трения продолжает удерживать от проскальзывания точки касания диска и поверхности. При дальнейшем увеличении силы \vec{Q} сила трения достигает максимума и начинается качение с проскальзыванием.

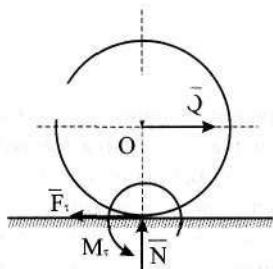


Рис. 8.6

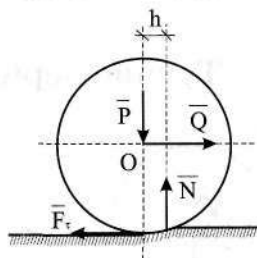


Рис. 8.7

Объяснить факт возникновения сопротивления качению цилиндра нельзя, оставаясь в рамках гипотезы о недеформируемости соприкасающихся поверхностей. В действительности цилиндр и опорная поверхность деформируются; существует некоторая площадка контакта конечного размера (рис. 8.7). Под действием силы \vec{Q} перераспределяются нормальные составляющие реакций. В результате точка приложения силы \vec{N} смещается в сторону действия силы \vec{Q} на некоторое расстояние h . Образуется пара сил (\vec{P}, \vec{N}) с моментом $M_r = h N$, которая до некоторых пор может уравнивать действие пары сил (\vec{Q}, \vec{F}_r) .

Смещение h имеет предел k , при достижении которого равновесие нарушается:

$$h \leq k; \quad Q r = h N; \quad Q \leq Q_{\max} = \frac{k}{r} N.$$

Пример 8.4. Определить, при каких значениях угла α (рис. 8.8) цилиндр радиуса r , лежащий на наклонной плоскости, останется в покое, если коэффициент трения качения равен k .

В рассматриваемом случае

$$Q = P_2 = P \sin \alpha; \quad N = P_1 = P \cos \alpha.$$

Равновесие возможно, если

$$Qr \leq kN, \quad \text{отсюда} \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{k}{r}.$$

Полученным результатом можно пользоваться для экспериментального определения коэффициента трения качения.

8.4 Трение верчения

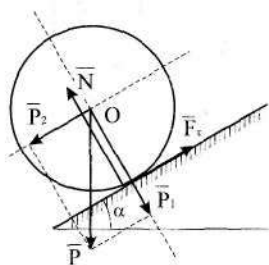


Рис. 8.8

Аналогично трению качения, свойства трения верчения исследуются на простом опыте: рассматривается шар, расположенный на горизонтальной плоскости и нагруженный силой тяжести и парой сил, момент которой перпендикулярен опорной поверхности. Оказывается, что шар удерживается от вращения вокруг вертикальной оси моментом трения верчения до тех пор, пока этот момент не достигнет некоторого предельного значения. Предельное значение вращающе-

го момента, после достижения которого начинается вращение шара, пропорционально величине нормальной реакции поверхности:

$$M_{n \max} = lN,$$

где l — коэффициент трения верчения, определяемый экспериментально. Коэффициент трения верчения имеет размерность длины. Заметим, что коэффициент трения верчения в 5-10 раз меньше коэффициента трения качения.

8.5 Трение нити о цилиндр

Рассмотрим гибкую нерастяжимую нить, охватывающую неподвижный круглый цилиндр радиуса r . К концам нити приложены силы \vec{P} и \vec{Q} . Коэффициент трения нити о цилиндр равен f . Определим минимальную силу \vec{P} , необходимую для удержания нити в равновесии при заданной силе \vec{Q} (рис.8.9).

Нормальная реакция цилиндра и сила трения непрерывным образом распределены по дуге охвата AB . Обозначим \vec{N} и \vec{F}_τ значения этих сил, отнесённых к единице длины нити. Эти силы будут функциями полярного угла φ , определяющего положение элемента длины нити ds . Сила натяжения нити \vec{T} также является функцией угла φ .

Рассмотрим элемент нити $ds = r d\varphi$ (рис. 8.10). На этот элемент действуют нормальная реакция цилиндра $N ds$, сила трения $F_\tau ds$, а также две силы натяжения \vec{T} и \vec{T}_1 , приложенные к рассматриваемому элементу в точках расщепления. Пренебрегая весом нити и учитывая малость угла $d\varphi$, т.е. полагая

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}; \quad \cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1,$$

запишем условия равновесия выделенного элемента в проекциях на направления нормали и касательной для средней точки элемента (рис.8.10):

$$N ds - T_1 \frac{d\varphi}{2} - T \frac{d\varphi}{2} = 0; \quad F_\tau ds + T_1 - T = 0.$$

Подставляя в эти уравнения $T_1 = T + dT$ и $ds = r d\varphi$, получаем:

$$N r - T = 0; \quad F_\tau r + \frac{dT}{d\varphi} = 0.$$

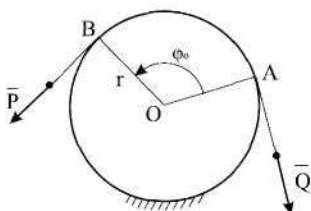


Рис. 8.9

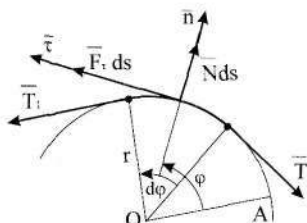


Рис. 8.10

Поскольку мы ищем предельное (минимальное) значение силы \vec{P} , при котором возможно равновесие, силу трения следует считать максимальной $F_\tau = f N$. Исключая из уравнений равновесия силу \vec{N} , получаем:

$$\frac{dT}{T} = -f d\varphi.$$

Выполняя интегрирование

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = -f \int_0^{\varphi_0} d\varphi,$$

находим:

$$\ln \frac{P}{Q} = -f \varphi_0 \quad P = P_{\min} = Q e^{-f \varphi_0}.$$

Определим теперь максимальное значение силы \vec{P} , при котором возможно равновесие. Для ответа на этот вопрос нет необходимости решать задачу заново. Следует только учесть, что в новой постановке задачи сила трения изменит своё направление на противоположное: если прежде она помогала силе \vec{P} сохранить равновесие, то теперь она препятствует силе \vec{P} нарушить равновесие. Изменение направления силы трения на противоположное приведёт к изменению знака при коэффициенте трения:

$$P = P_{\max} = Q e^{f \varphi_0}.$$

Таким образом, нить будет находиться в равновесии, если сила \vec{P} удовлетворяет неравенству:

$$Q e^{-f \varphi_0} \leq P \leq Q e^{f \varphi_0}.$$

Глава 9

Пример статического расчёта конструкции

9.1 Исходные данные

Конструкция состоит из фермы ADC и пластины BC , соединённых между собой шарниром C . В точках A и B установлены неподвижные шарниры. Размеры и приложенная нагрузка указаны на рис. 9.1.

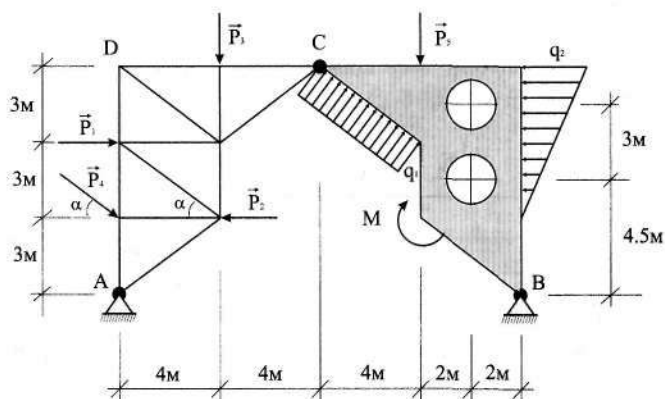


Рис. 9.1

Дано:

$$P_1 = 24 \text{ кН}; \quad P_2 = 12 \text{ кН}; \quad P_3 = 30 \text{ кН}; \quad P_4 = 15 \text{ кН};$$

$$P_5 = 33 \text{ кН}; \quad M = 6 \text{ кНм}; \quad q_1 = 8 \text{ кН/м}; \quad q_2 = 6 \text{ кН/м}.$$

Вычисляем необходимые для дальнейших расчётов значения тригонометрических функций угла α :

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}; \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

9.2 Определение опорных реакций и усилия в шарнире С

Принимая точку A за начало координат, направим ось x вправо, ось y вверх.

Заменим распределённую нагрузку равнодействующими \vec{Q}_1 и \vec{Q}_2 . Как известно, модуль равнодействующей распределённой нагрузки равен площади её эпюры:

$$Q_1 = 5 q_1 = 40 \text{ кН}; \quad Q_2 = 3 q_2 = 18 \text{ кН}.$$

Линии действия равнодействующих проходят через центры тяжести соответствующих эпюр. Получаем координаты точек приложения сил \vec{Q}_1 и \vec{Q}_2 соответственно равными

$$x_1 = 6 \text{ м}; \quad y_1 = 7.5 \text{ м} \quad \text{и} \quad x_2 = 16 \text{ м} \quad y_2 = 7 \text{ м}.$$

Рассмотрим равновесие всей конструкции. Силовая схема представлена на рис. 9.2.

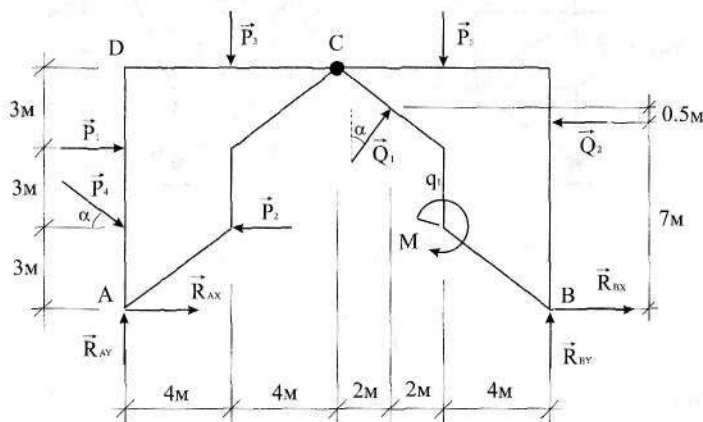


Рис. 9.2

Составим условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} + R_{Bx} + P_1 - P_2 + P_4 \cos \alpha + Q_1 \sin \alpha - Q_2 = 0; \quad (9.1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} - P_3 - P_4 \sin \alpha + Q_1 \cos \alpha - P_5 = 0; \quad (9.2)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0; \quad R_{By} \cdot 16 - P_1 \cdot 6 + P_2 \cdot 3 - P_3 \cdot 4 - P_4 \cos \alpha \cdot 3 + \\ + Q_1 \cos \alpha \cdot 10 - Q_1 \sin \alpha \cdot 7.5 - P_5 \cdot 12 + Q_2 \cdot 7 - M = 0. \quad (9.3)$$

Рассмотрим равновесие левой части конструкции - фермы. Силовая схема представлена на рис. 9.3.

Составим условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{Ax} + R_{Cx} + P_1 - P_2 + P_4 \cos \alpha = 0; \quad (9.4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{Ay} + R_{Cy} - P_3 - P_4 \sin \alpha = 0; \quad (9.5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_{Cx} \cdot 9 + R_{Cy} \cdot 8 - P_1 \cdot 6 + P_2 \cdot 3 - P_3 \cdot 4 - P_4 \cos \alpha \cdot 3 = 0. \quad (9.6)$$

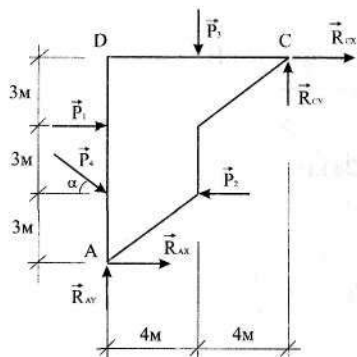


Рис. 9.3

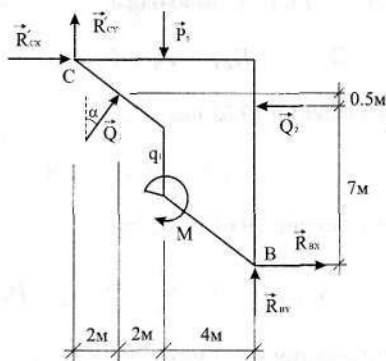


Рис. 9.4

Отсюда

$$S_6 = -S_7 \cos \alpha - P_1 = -8 \text{ кН} \quad \text{стержень сжат};$$

$$S_3 = S_7 \sin \alpha + S_2 = -30 \text{ кН} \quad \text{стержень сжат}.$$

Узел D (рис. 9.10)

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad S_4 + S_5 \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_3 + S_5 \sin \alpha = 0.$$

Отсюда

$$S_5 = -\frac{S_3}{\sin \alpha} = 50 \text{ кН} \quad \text{стержень растянут};$$

$$S_4 = -S_5 \cos \alpha = -40 \text{ кН} \quad \text{стержень сжат}.$$

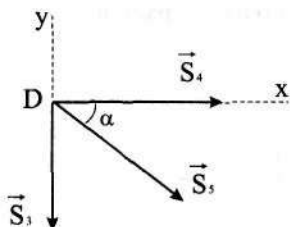


Рис. 9.10

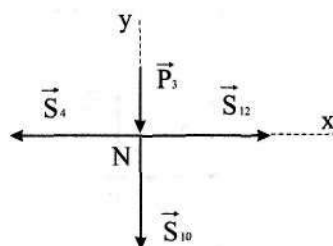


Рис. 9.11

Узел N (рис. 9.11)

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad S_{12} - S_4 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_{10} + P_3 = 0.$$

Отсюда

$$S_{12} = S_4 = -40 \text{ кН} \quad \text{стержень сжат};$$

$$S_{10} = -3 = -30 \text{ кН} \quad \text{стержень сжат}.$$

Узел L (рис. 9.12)

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad S_{13} \cos \alpha - S_5 \cos \alpha - S_6 = 0;$$

Отсюда

$$S_5 = \frac{S_6}{\cos \alpha} + S_5 = 40 \text{ кН} \quad \text{стержень растянут}.$$

Определены усилия во всех стержнях фермы. Оставшиеся уравнения равновесия узлов используем для проверки полученных результатов.

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad S_{10} + S_{13} \sin \alpha + S_5 \sin \alpha = 54 - 54 \equiv 0.$$

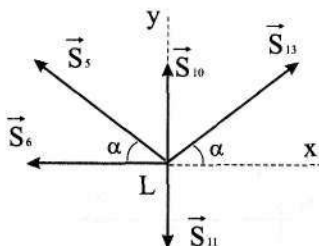


Рис. 9.12

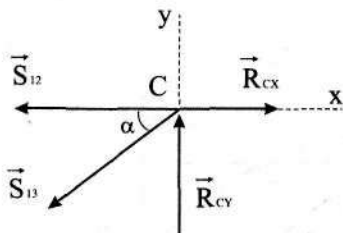


Рис. 9.13

Узел C (рис. 9.13)

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0; \quad R_{Cx} - S_{12} - S_{13} \cos \alpha = 40 - 40 \equiv 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0; \quad R_{Cy} - S_{13} \sin \alpha = 24 - 24 \equiv 0.$$

Метод сквозных сечений

Проведём сквозное сечение по третьему, шестому и одиннадцатому стержням. Рассмотрим равновесие нижней части фермы. Силовая схема представлена на рис. 9.14. Выбираем условия равновесия таким образом, чтобы в каждое из них входила только одна неизвестная.

$$\sum_{k=1}^n M_{LZ}(\vec{F}_k) = -S_4 \cdot 4 - P_2 \cdot 3 + P_4 \sin \alpha \cdot 4 + P_4 \cos \alpha \cdot 3 + R_{AX} \cdot 6 - R_{AY} \cdot 4 = 0,$$

отсюда $S_3 = -30 \text{ кН}$.

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = S_6 + P_1 - P_2 + P_4 \cos \alpha + R_{AX} = 0,$$

отсюда $S_6 = -8 \text{ кН}$.

$$\sum_{k=1}^n M_{EZ}(\vec{F}_k) = S_{11} \cdot 4 - P_2 \cdot 3 + P_4 \cos \alpha \cdot 3 + R_{AX} \cdot 6 = 0,$$

отсюда $S_{11} = 24 \text{ кН}$.

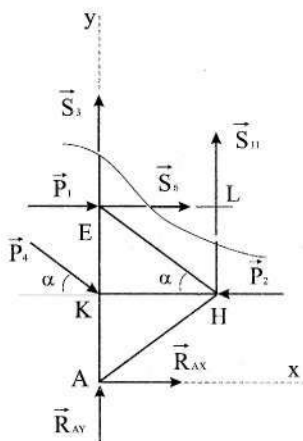


Рис. 9.14

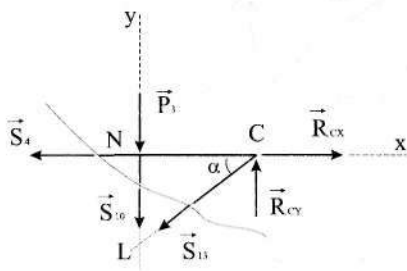


Рис. 9.15

Второе сквозное сечение проведём через четвёртый, десятый и тринадцатый стержни (рис. 9.15).

$$\sum_{k=1}^n M_{LZ}(\vec{F}_k) = S_4 \cdot 4 + R_{CY} \cdot 4 - R_{CY} \cdot 3 = 0, \quad \text{отсюда } S_4 = -40 \text{ кН.}$$

$$\sum_{k=1}^n M_{CZ}(\vec{F}_k) = S_{10} \cdot 3 + P_3 \cdot 3 = 0, \quad \text{отсюда } S_{10} = -30 \text{ кН.}$$

$$\sum_{k=1}^n M_{NZ}(\vec{F}_k) = -S_{13} \sin \alpha \cdot 4 + R_{CY} \cdot 4 = 0, \quad \text{отсюда } S_{13} = 40 \text{ кН.}$$

Построение диаграммы Максвелла–Кремоны

На рис. 9.16 приведена разбивка на внешние и внутренние зоны действия сил.

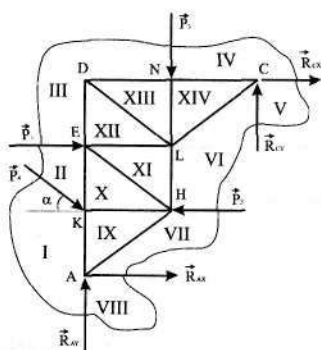


Рис. 9.16

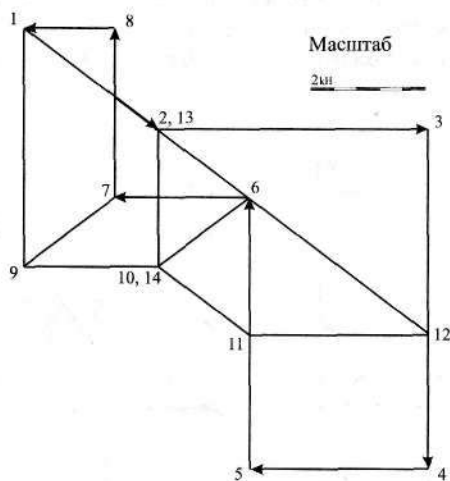


Рис. 9.17

Диаграмма Максвелла–Кремоны приведена на рис. 9.17.

Таблица полученных результатов

Метод \ Усилие	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}
Метод вырезания узлов	-27	-18	-30	-40	50	-8	-20	-12	20	-30	24	-40	40
Метод сквозных сечений			-30	-40		-8				-30	24		40
Диаграмма Максвелла-Кремоны	-27	-18	-30	-40	50	-8	-20	-12	20	-30	24	-40	40

9.4 Приведение системы активных сил к простейшему виду

На рис. 9.18 изображена система активных сил, приложенных к рассматриваемой конструкции. Силы \vec{G}_1 и \vec{G}_2 составляют пару сил с заданным моментом $M_z = -6 \text{ кН/м}$. Эту систему сил необходимо привести к простейшему виду.

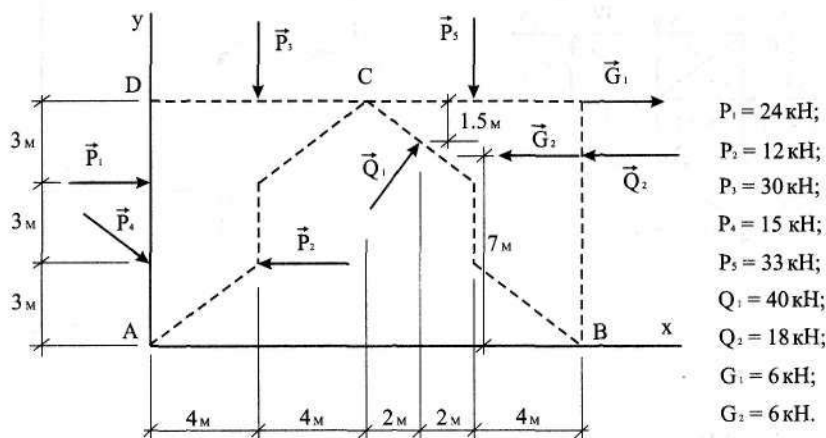


Рис. 9.18

Графическое построение равнодействующей

На рис. 9.19 изображена в масштабе заданная система активных сил. Сила \vec{P}'_3 Представляет собой равнодействующую сил \vec{P}_3 и \vec{G}_1 ; сила \vec{Q}'_2 — равнодействующая сил \vec{Q}_2 и \vec{G}_2 .

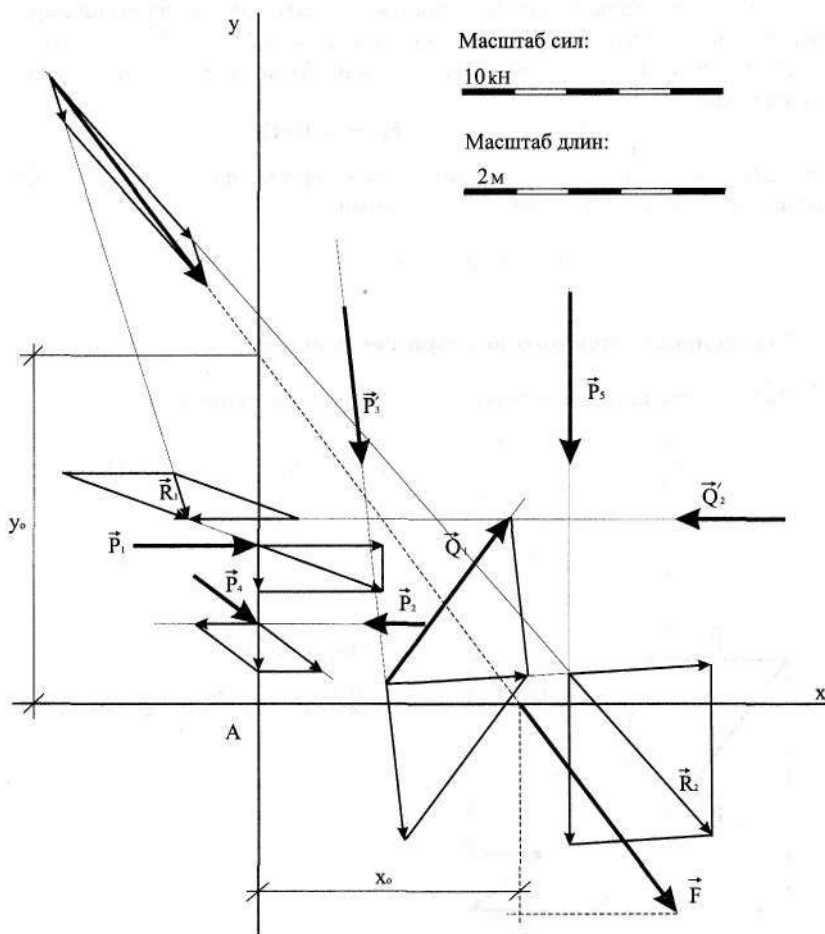


Рис. 9.19

Выбранная последовательность сложения сил следующая. Сначала строится равнодействующая сил \vec{P}_2 и \vec{P}_4 ; полученный результат складывается с \vec{P}_1 , затем с \vec{Q}_2 - получаем силу \vec{R}_1 . Далее заменяем силы \vec{P}_3 и \vec{Q}_1 равнодействующей, которую складываем с силой \vec{P}_5 - получаем силу \vec{R}_2 . Остаётся построить равнодействующую сил \vec{R}_1 и \vec{R}_2 , то есть равнодействующую \vec{F} заданной системы активных сил.

Следует заметить, что выбранная последовательность действий определяется исключительно удобством построения.

По чертежу находим величины проекций равнодействующей на координатные оси:

$$F_x = 30 \text{ кН}; \quad F_y = -40 \text{ кН}.$$

Определяем графически координаты точек пересечения линии действия равнодействующей с координатными осями:

$$x_o = 10 \text{ м}; \quad y_o = 13.3 \text{ м}.$$

Вычисление главного вектора системы сил

Найдём проекции главного вектора на координатные оси:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{kx} = P_1 - P_2 + P_4 \cos \alpha + Q_1 \sin \alpha - Q_2 = 30 \text{ кН};$$

$$R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{ky} = -P_3 - P_4 \sin \alpha - F + Q_1 \cos \alpha = -40 \text{ кН}.$$

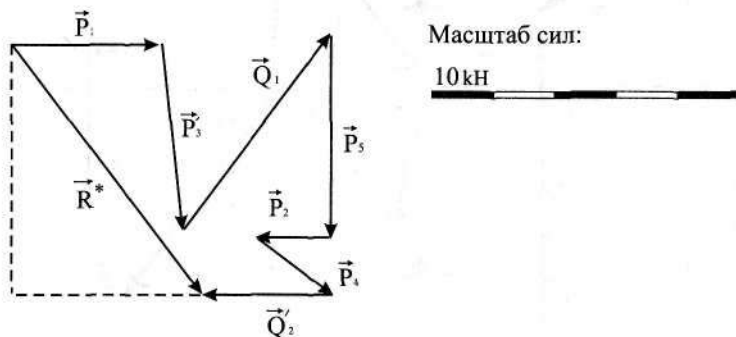


Рис. 9.20

Для проверки полученного результата построим силовой многоугольник из сил заданной системы (рис. 9.20).

По чертежу определяем величины проекций главного вектора на координатные оси:

$$R_x^* = 30 \text{ кН}; \quad R_y^* = -40 \text{ кН}.$$

Вычисление главного момента системы сил

Принимая точку A за центр приведения, вычислим проекцию главного момента системы активных сил на координатную ось Az . Вычисления проводятся по формуле:

$$M_{Az}^* = \sum_{k=1}^4 (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}),$$

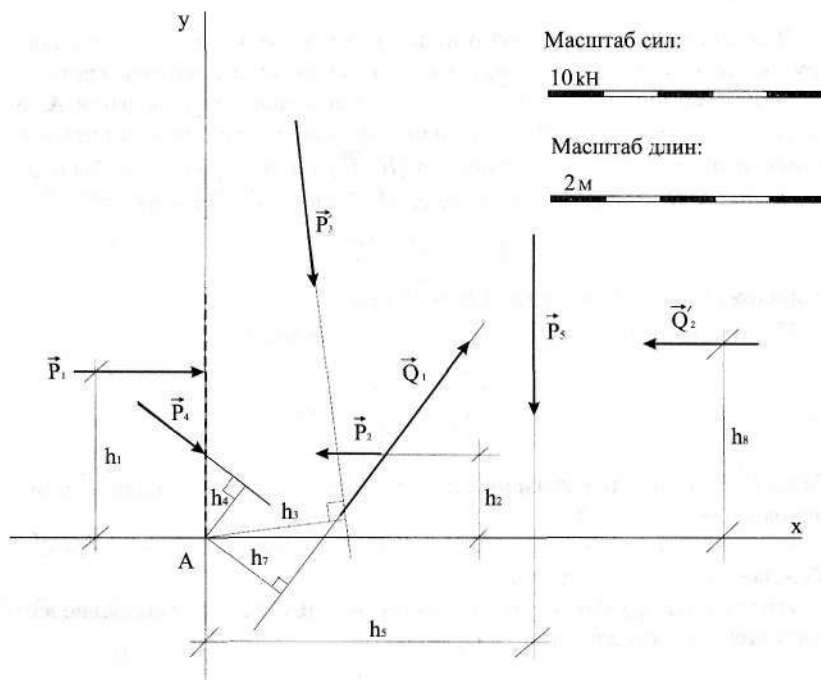


Рис. 9.21

Выбранная последовательность сложения сил следующая. Сначала строится равнодействующая сил \vec{P}_2 и \vec{P}_4 ; полученный результат складывается с \vec{P}_1 , затем с \vec{Q}_2 - получаем силу \vec{R}_1 . Далее заменяем силы \vec{P}_3 и \vec{Q}_1 равнодействующей, которую складываем с силой \vec{P}_5 - получаем силу \vec{R}_2 . Остаётся построить равнодействующую сил \vec{R}_1 и \vec{R}_2 , то есть равнодействующую \vec{F} заданной системы активных сил.

Следует заметить, что выбранная последовательность действий определяется исключительно удобством построения.

По чертежу находим величины проекций равнодействующей на координатные оси:

$$F_x = 30 \text{ кН}; \quad F_y = -40 \text{ кН}.$$

Определяем графически координаты точек пересечения линии действия равнодействующей с координатными осями:

$$x_o = 10 \text{ м}; \quad y_o = 13.3 \text{ м}.$$

Вычисление главного вектора системы сил

Найдём проекции главного вектора на координатные оси:

$$R_x^* = \sum_{k=1}^n F_{kx} = P_1 - P_2 + P_4 \cos \alpha + Q_1 \sin \alpha - Q_2 = 30 \text{ кН};$$

$$R_y^* = \sum_{k=1}^n F_{ky} = -P_3 - P_4 \sin \alpha - F + Q_1 \cos \alpha = -40 \text{ кН}.$$

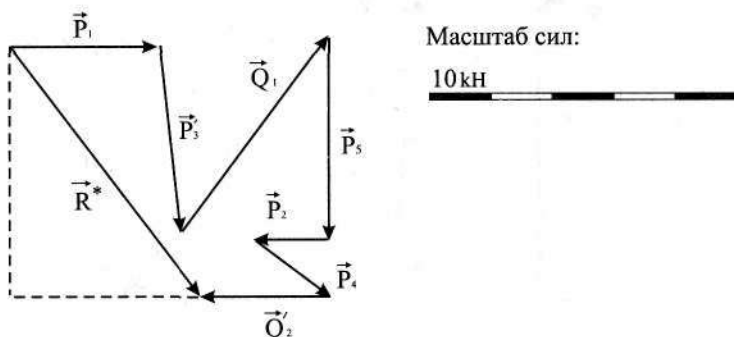


Рис. 9.20

Для проверки полученного результата построим силовой многоугольник из сил заданной системы (рис. 9.20).

По чертежу определяем величины проекций главного вектора на координатные оси:

$$R_x^* = 30 \text{ кН}; \quad R_y^* = -40 \text{ кН}.$$

Вычисление главного момента системы сил

Принимая точку A за центр приведения, вычислим проекцию главного момента системы активных сил на координатную ось Az . Вычисления проводятся по формуле:

$$M_{Az}^* = \sum_{k=1}^4 (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}),$$

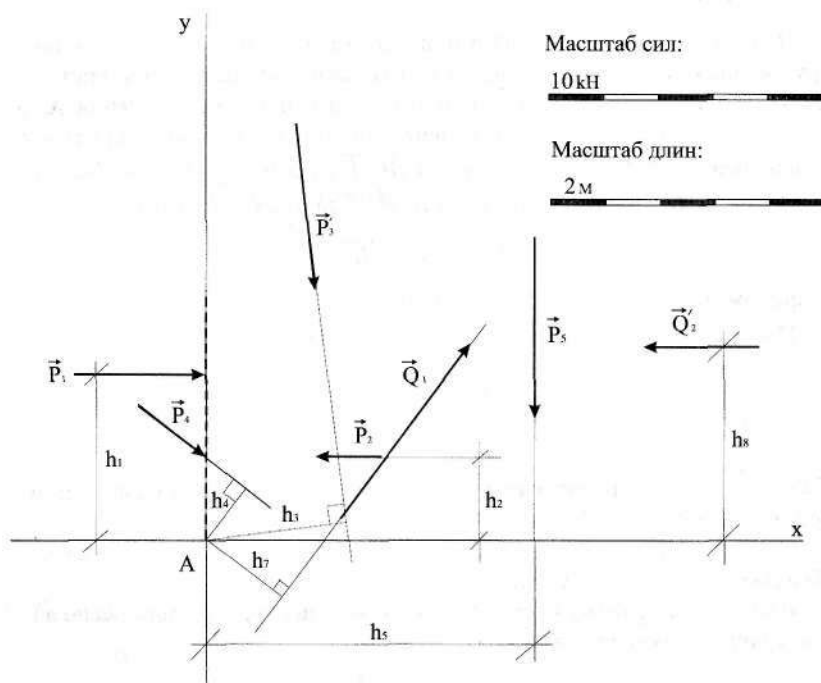


Рис. 9.21

где x_k, y_k - координаты точки приложения силы с номером k , F_{kx}, F_{ky} - её проекции на координатные оси. В нашем случае получаем

$$M_{Az}^* = -P_4 \cos \alpha \cdot 3 - P_1 \cdot 6 + P_2 \cdot 3 - P_3 \cdot 4 - F \cdot 12 + Q_2 \cdot 7 + \\ + Q_1 \cos \alpha \cdot 10 - Q_1 \sin \alpha \cdot \frac{15}{2} - M = -400 \text{ кН м.}$$

Проверим полученный результат, используя формулу:

$$M_{Az}^* = \sum_{k=1}^4 (\pm 1) |\vec{F}_k| h_k.$$

Плечи сил h_k измерять по чертежу в масштабе (рис. 9.21):

$$M_{Az}^* = -36 - 144 + 36 - 120 - 396 + 126 + 320 - 180 - 6 = -400 \text{ кН м.}$$

Построение равнодействующей

В соответствии с теоремой о приведении системы сил к одному центру заданная система активных сил оказалась эквивалентной системе, состоящей из силы $\vec{R} = \vec{R}^*$, приложенной в центре приведения А, и пары сил, момент которой равен главному моменту системы сил относительно центра А. Построим пару сил (\vec{R}, \vec{F}) таким образом, чтобы одна из сил пары \vec{R} уравновешивала силу \vec{R} . Для этого положим

$$\vec{R} = -\vec{F} = \vec{R}^*$$

и приложим силу \vec{R} в точке А (рис. 9.22).

Плечо пары сил (\vec{R}, \vec{F}) определяем по формуле

$$h = \frac{|\vec{M}_A^*|}{|\vec{R}^*|} = \frac{400}{50} = 8 \text{ м.}$$

Силы \vec{R} и \vec{R} уравновешивают друг друга, оставшаяся сила \vec{F} и будет равнодействующей.

Сравнивая построенную силу \vec{F} с полученным ранее результатом, убеждаемся в их совпадении.

Измеряя по чертежу отрезки, отсекаемые линией действия равнодействующей на координатных осях, получаем:

$$x_o = 10 \text{ м; } y_o = \frac{40}{3} \simeq 13.3 \text{ м.}$$

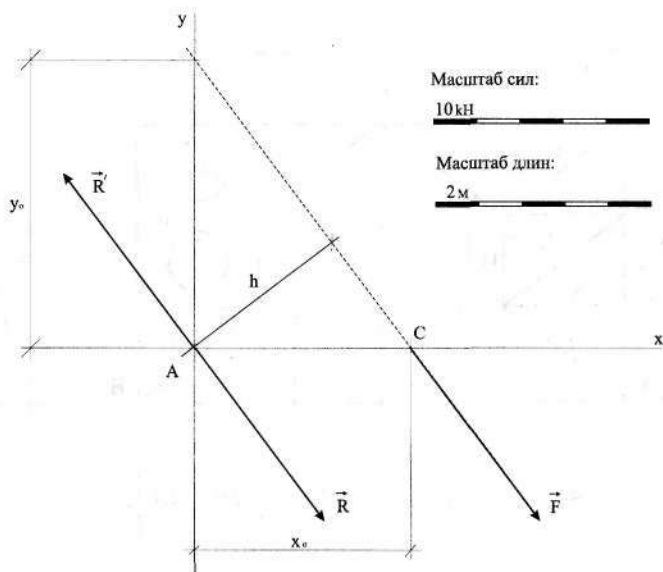


Рис. 9.22

Уравнение линии действия равнодействующей

Составим уравнение линии действия равнодействующей

$$M_{Az}^* = x R_y^* - y R_x^*.$$

В нашем примере получаем:

$$3y + 4x = 40.$$

Отрезки, отсекаемые этой линией на координатных осях, оказываются равными

$$x_o = 10 \text{ м}; \quad y_o = \frac{40}{3} \simeq 13.3 \text{ м},$$

что совпадает с полученным ранее результатом.

9.5 Определение положения центра тяжести конструкции

Левая часть конструкции образована тринадцатью однородными стержнями (рис. 9.23).

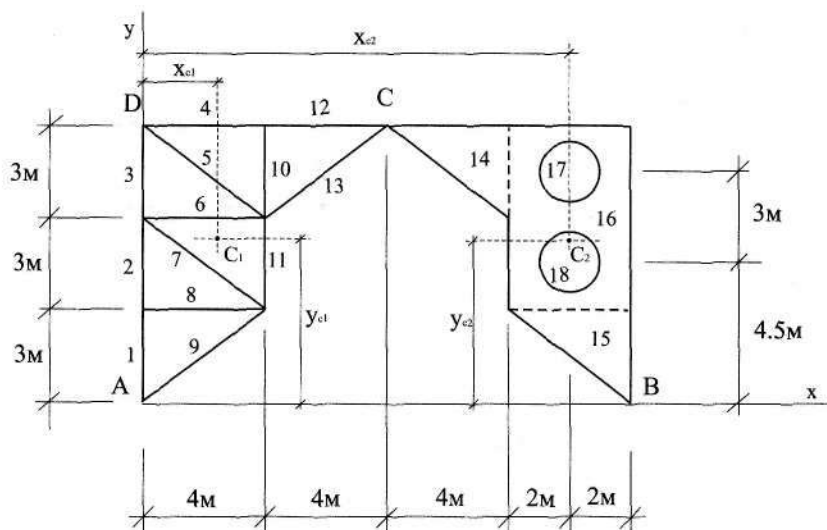


Рис. 9.23

Координаты центров тяжести стержней x_k, y_k и их длины L_k приведены в табл. 1.

Таблица 1

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Координата x центра тяжести стержня (м)	0	0	0	2	2	2	2	2	2	4	4	6	6
Координата y центра тяжести стержня (м)	1.5	4.5	7.5	9.0	7.5	6.0	4.5	3.0	1.5	7.5	4.5	6.0	6.0
Длина стержня (м)	3	3	3	4	5	4	5	4	5	3	3	4	5

Координаты центра тяжести фермы определяем по формулам:

$$x_{c1} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k L_k}{\sum_{k=1}^n L_k} \simeq 2.59 \text{ м}; \quad y_{c1} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k L_k}{\sum_{k=1}^n L_k} \simeq 5.59 \text{ м}.$$

Вес фермы пропорционален длине стержней, из которых образована ферма. Учитывая, что вес 1 м стержня по условию составляет 0.3 кН, получаем вес фермы

$$G_1 = 0.3 \cdot 51 = 15.3 \text{ кН.}$$

Положение центра тяжести фермы (точка C_1) показано на рис. 9.23.

Правая часть конструкции представляет собой однородную пластину с круглыми отверстиями, радиус которых $r = 1.2$ м. Разобьём пластину на части, положение центров тяжести которых известно из соображений симметрии: два треугольника (тела 14 и 15), прямоугольник без отверстий (тело 16) и два круга (тела 17 и 18), площадь (вес) которых считаем отрицательной.

Координаты центров тяжести тел x_k, y_k и их площади S_k приведены в табл. 2.

Таблица 2

Номер тела	14	15	16	17	18
Координата x центра тяжести тела (м)	6.67	14.67	14	14	14
Координата y центра тяжести тела (м)	8	2	6	7.5	4.5
Площадь тела (м^2)	6	6	24	- 4.52	- 4.52

Координаты центра тяжести пластины определяем по формулам:

$$x_{c2} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k S_k}{\sum_{k=1}^n S_k} = 14 \text{ м;} \quad y_{c2} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k S_k}{\sum_{k=1}^n S_k} \simeq 5.55 \text{ м.}$$

Вес пластины пропорционален её площади. Учитывая, что вес одного квадратного метра пластины по условию составляет 0.6 кН, получаем вес пластины

$$G_2 = 0.6 \cdot 26.96 \simeq 16.18 \text{ кН.}$$

Положение центра тяжести пластины (точка C_2) показано на рис. 9.23.

Вычислим реакции опор А и В с учётом собственного веса конструкции. Рассмотрим равновесие пластины. Силовая схема представлена на рис. 9.24.

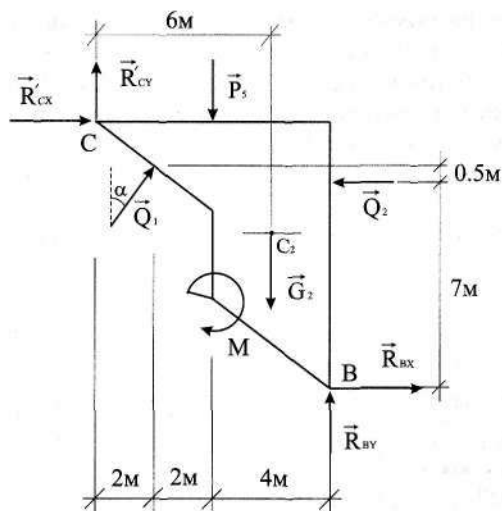


Рис. 9.24

Составим уравнение моментов относительно оси Cz ;

$$\sum_{k=1}^n M_{Cz}(\vec{F}_k) = 0; \quad R_{By} \cdot 8 + R_{Bx} \cdot 9 - P_5 \cdot 4 + Q_1 \cos \alpha \cdot 2 + \\ + Q_1 \sin \alpha \cdot 1.5 - Q_2 \cdot 2 - M - G_2 \cdot 6 = 0. \quad (9.10)$$

Рассмотрим равновесие всей системы. Силовая схема представлена на рис. 9.25. При составлении силовой схемы учтено, что заданная система активных сил (за исключением силы тяжести) приведена к простейшему виду - найдена равнодействующая этой системы сил - \vec{F} .

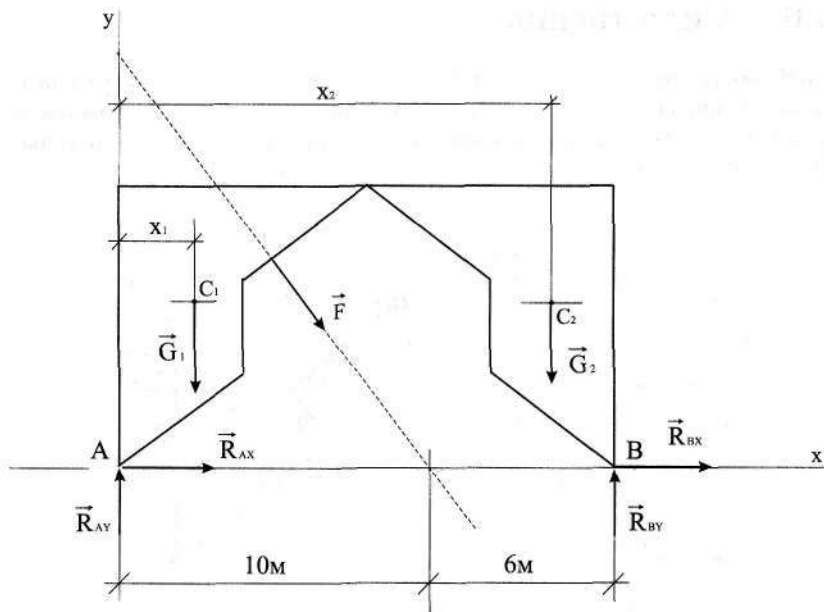


Рис. 9.25

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad R_{AX} + R_{BX} + F_x = 0; \quad (9.11)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad R_{AY} + R_{BY} + F_y - G_1 - G_2 = 0; \quad (9.12)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0; \quad R_{BY} \cdot 16 - G_1 \cdot x_1 - G_2 \cdot x_2 + F_y \cdot 10 = 0. \quad (9.13)$$

Уравнения (9.13) и (9.10) позволяют определить

$$R_{BY} \simeq 41.63 \text{ кН}; \quad R_{BX} \simeq -18.04 \text{ кН}.$$

Из уравнений (2) и (3) находим:

$$R_{AX} = -12 \text{ кН}; \quad R_{AY} = 29.85 \text{ кН}.$$

9.6 Сила трения

В соответствии с заданными условиями, конструкция закреплена в точке В при помощи неподвижного шарнира и свободно опирается в точке А на горизонтальную шероховатую поверхность. Опора в точке D, если она была, должна быть убрана (рис.9.26).

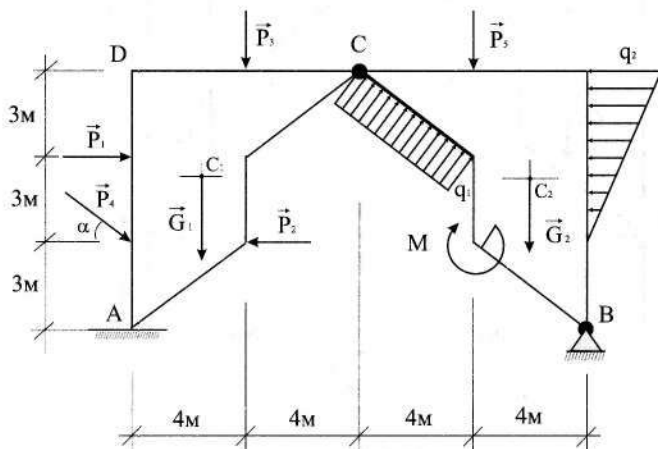


Рис. 9.26

Предположим, что конструкция находится в равновесии. Силовая схема представлена на рис.9.27.

Составим условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \quad F_{\tau} + R_{BX} + F_x = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad N_A + R_{BY} + F_y - G_1 - G_2 = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0; \quad R_{BY} \cdot 16 - G_1 \cdot x_1 - G_2 \cdot x_2 + F_y \cdot 10 = 0,$$

где F_{τ} - сила трения.

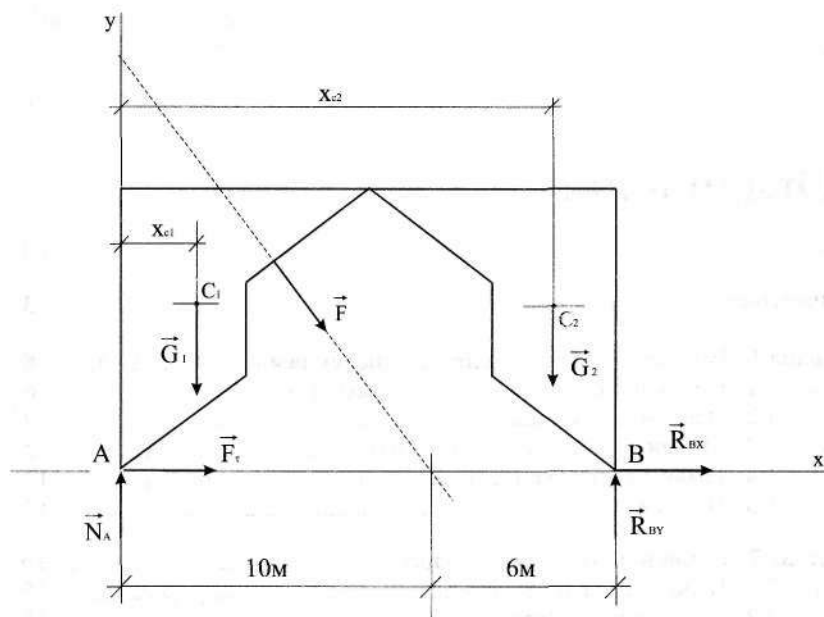


Рис. 9.27

Эту систему уравнений следует дополнить уравнением

$$\sum_{k=1}^n M_{AZ}(\vec{F}_k) = 0,$$

составленным для правой части конструкции - пластины. В нашем примере такое уравнение уже составлено - это уравнение (9.13).

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$F_{\tau} = -12 \text{ кН}; \quad N_A = 29.85 \text{ кН}.$$

Равновесие возможно, если

$$|F_{\tau}| \leq f \cdot |N_A| \quad f \geq \frac{|F_{\tau}|}{|N_A|} \approx 0.4.$$

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Предмет статики. Действия над силами	6
1.1 Основные определения и аксиомы статики	6
1.2 Элементы векторной алгебры	9
1.3 Момент силы относительно точки	12
1.4 Главный вектор и главный момент системы сил	13
1.5 Пара сил	15
Глава 2. Основные теоремы статики	16
2.1 Вспомогательные теоремы	16
2.2 Приведение системы сил к центру	18
2.3 Условия равновесия системы сил	19
2.4 Эквивалентность систем сил	21
2.5 Снова о паре сил	22
2.6 Приведение системы сил к простейшему виду.....	22
Глава 3. Примеры решения задач приведения системы сил к простейшему виду.....	26
3.1 Системы сил, эквивалентные паре сил.....	26
3.2 Системы сил, эквивалентные одной силе.....	27
3.3 Системы сил, эквивалентные динамическому винту.....	33
Глава 4. Объёмные и поверхностные силы.....	35
4.1 Центр параллельных сил.....	35
4.2 Центр тяжести	37
4.3 Распределённая нагрузка.....	42
Глава 5. Равновесие несвободного тела	45
5.1 Методика решения задач	45
5.2 Основные виды связей	46
5.3 Задачи статически определённые и неопределённые	49
5.4 Условия равновесия несвободного твёрдого тела	50

Глава 6. Примеры решения задачи определения статических реакций	52
6.1 Равновесие системы сходящихся сил	52
6.2 Равновесие системы сил, линии действия которых лежат в одной плоскости	57
6.3 Равновесие произвольной системы сил	62
Глава 7. Статический расчёт конструкций.....	68
7.1 Равновесие составных тел	68
7.2 Расчёт ферм	77
Глава 8. Трение	85
8.1 Реакция негладкой поверхности	85
8.2 Сила трения	86
8.3 Трение качения	90
8.4 Трение верчения	92
8.5 Трение нити о цилиндр	92
Глава 9. Пример статического расчёта конструкции	95
9.1 Исходные данные	95
9.2 Определение опорных реакций и усилия в шарнире С	96
9.3 Расчёт фермы	99
9.4 Приведение системы активных сил к простейшему виду	106
9.5 Определение положения центра тяжести конструкции	111
9.6 Сила трения	116

Виктор Иванович Антонов
Олег Олегович Егорычев
Алексей Владимирович Пашков

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ СТАТИКИ

Учебное пособие по теоретической механике

Редактор О.А.Гладкова

Лицензия № ЛР № 020675 от 09.12.97 г.

Подписано в печать 12.11.07 Формат 60х90 1/16. Печать офсетная

И - 168 Объем 7.5 п.л. Т.2000 экз. Заказ 359

Московский государственный строительный университет

Отпечатано в типографии МГСУ